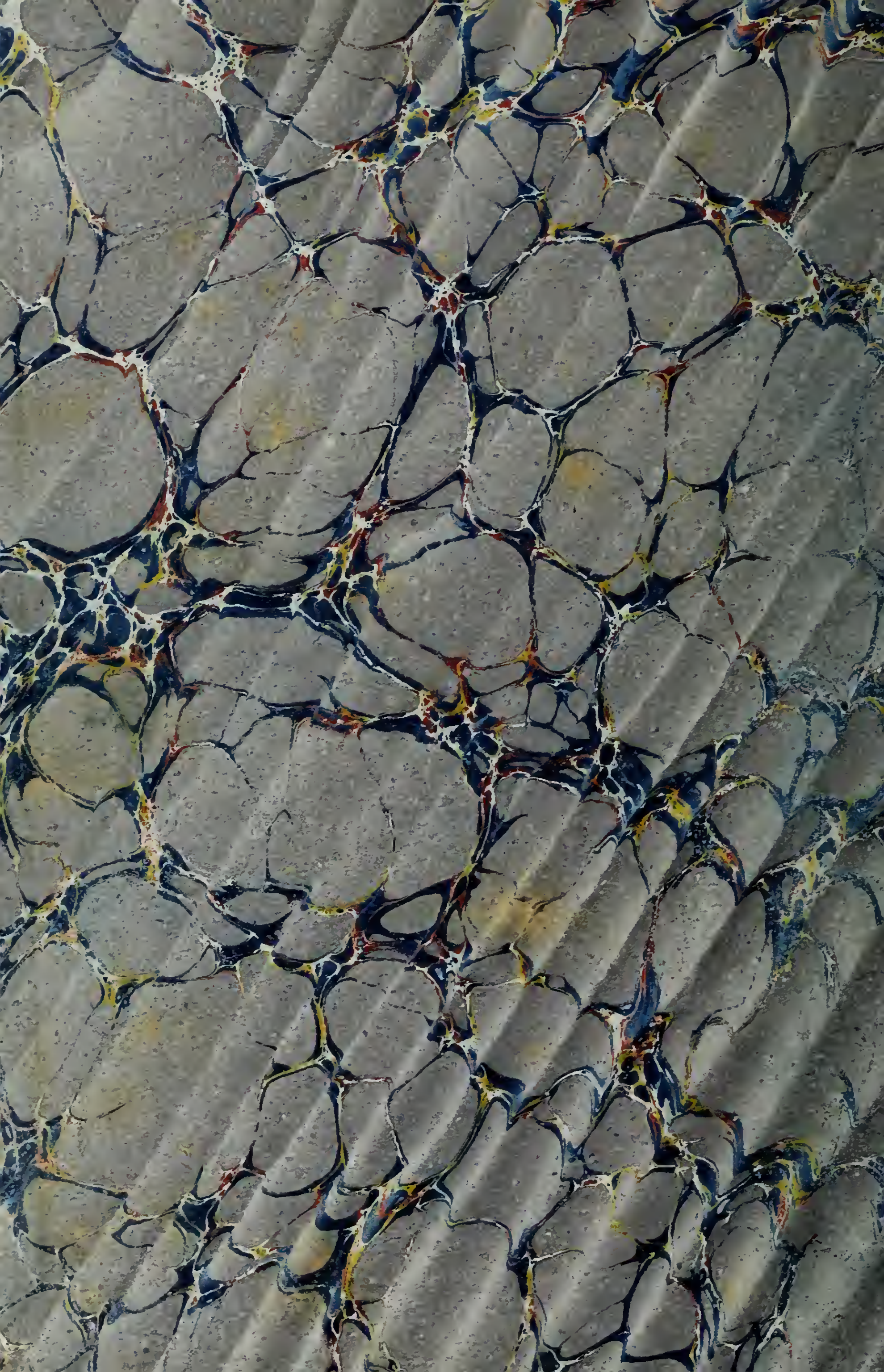










PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,

AVEC LA COLLABORATION
DE MM. ANDRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME NEUVIÈME. — JUILLET 1875.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1875

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. CHASLES, *président*.

BERTRAND.

PUISEUX.

SERRET.

N....

LISTE DES COLLABORATEURS DU BULLETIN

PENDANT LES TROIS PREMIÈRES ANNÉES.

MM. Baillaud, agrégé de l'Université.
Battaglini, professeur à l'Université de Rome.
Beltrami, professeur à l'Université de Bologne.
Bertrand (J.), membre de l'Institut.
Bonnet (O.), membre de l'Institut.
Bouquet, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
Clebsch, professeur à l'Université de Göttingue.
De Tilly, capitaine d'Artillerie, à Bruxelles.
Dewulf, commandant du Génie aux îles d'Hyères.
Ermakof, à Kazan.
Hermite, membre de l'Institut.
Imschenetsky, professeur à l'Université de Kharkof.
Klein, professeur à l'Université d'Erlangen.
Laguerre, répétiteur à l'École Polytechnique.
Lampe, professeur à Berlin.
Laurent (H.), répétiteur à l'École Polytechnique.
Lie, professeur à l'Université de Christiania.
Lindelöf, professeur à l'Université de Helsingfors.
Lipschitz, professeur à l'Université de Bonn.
Mannheim, professeur à l'École Polytechnique.
Mansion (P.), professeur à l'Université de Gand.
Padova, professeur à Pise.
Pellet, professeur au Lycée de Bourg.
Potocki, licencié ès Sciences, à Bordeaux.
Resal, membre de l'Institut.
Serret (J.-A.), membre de l'Institut.
Simon (Ch.), professeur au Lycée Louis-le-Grand.
Tisserand, directeur de l'Observatoire de Toulouse.
Weyr (Em.), professeur à l'Institut Polytechnique tchèque.
Wolf (R.), professeur à Zurich.
Zeuthen, professeur à l'Université de Copenhague.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

АНДРЕЕВЪ (К.-А.). — О геометрическомъ образованіи плоскихъ кривыхъ. — Харьковъ. Въ Университетской Типографіи. 1875 (¹).

Ce Mémoire, publié au mois de février 1875, a pour objet l'étude de la construction des courbes planes des ordres supérieurs par des méthodes purement géométriques. Après une Préface consacrée aux définitions des éléments géométriques, l'auteur donne un aperçu historique des recherches sur la génération et la construction géométrique des courbes. Il y distingue deux méthodes différentes, également propres à conduire à des constructions géométriques de courbes planes : l'une donnée par M. Chasles dans son beau Mémoire sur la *Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points*; l'autre employée par M. Em. Weyr, dans sa *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde*, et par M. Schröter dans son Mémoire intitulé : *Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve dritter Ordnung*. De ces deux méthodes, dont la première est fondée sur la substitution successive aux formes géométriques élémentaires des formes plus com-

---

(¹) Andréief (K.-A.). — *Sur la génération géométrique des courbes planes.* — Kharkof, typographie de l'Université, 1875. — Grand in-8°, 76 p., 1 pl.

pliquées, en conservant en même temps entre les éléments de ces formes toujours la même dépendance projective, et dont la seconde consiste à généraliser de plus en plus la dépendance même qui existe entre les éléments des formes géométriques, mais à n'employer que des formes élémentaires, M. Andréief donne la préférence à la seconde, qu'il considère comme plus propre à conduire à des constructions géométriques moins compliquées pour les courbes des ordres supérieurs au troisième. C'est aussi cette dernière méthode qu'il emploie dans ses propres recherches.

Pénétré d'un esprit purement géométrique, M. Andréief évite de recourir dans ses recherches à l'emploi des relations analytiques, comme l'ont fait MM. Weyr et Schröter dans leurs Ouvrages cités. Il admet, à l'exemple de M. Weyr, entre les formes élémentaires géométriques qu'il emploie, *une dépendance mutuelle à doubles valeurs* (*ein-zweideutige Beziehung*), et ce n'est qu'à l'aide d'une étude approfondie des propriétés des formes géométriques soumises à cette dépendance qu'il arrive à une méthode générale pour la construction des courbes du troisième ordre et de celles des courbes du quatrième ordre qui possèdent deux points doubles.

L'exactitude des méthodes employées par M. Andréief, leur esprit purement géométrique, la logique sévère de toutes les démonstrations et les résultats nouveaux qu'il donne attireront certainement l'attention des savants sur le Mémoire du jeune géomètre que nous ne pouvons que féliciter des résultats qu'il a obtenus, en lui souhaitant de continuer à travailler dans la même direction.

Nous remarquons, en terminant notre analyse, que M. Weyr a, de son côté, publié un Mémoire sur la génération des courbes du troisième ordre, présenté à l'Académie des Sciences de Vienne le 30 avril 1874, où il emploie une méthode purement géométrique, analogue à celle de M. Andréief; mais ces recherches de l'habile géomètre tchèque, malgré la priorité acquise par la date de leur publication, ne diminuent en rien la valeur du Mémoire du jeune savant russe; car M. Weyr ne s'occupe que de la génération des courbes du troisième ordre, tandis que la méthode de M. Andréief le conduit en outre à la construction des courbes du troisième ordre et de celles des courbes du quatrième ordre qui ont deux points doubles.

D. DE LA RUE.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON [1].

T. XXXIV; 1873-1874.

Novembre 1873.

Airy (G.-B.). — *Sur le rejet, dans la théorie de la Lune, du terme relatif à la longitude et dépendant de huit fois la longitude moyenne de Vénus et de treize fois la longitude moyenne de la Terre, qu'a introduit le professeur Hansen. Influence de ce rejet sur l'état des Tables lunaires et sur les calculs relatifs à notre satellite qui servent de base à la chronologie ancienne.*

Neison (E.). — *Sur la correction au demi-diamètre de la Lune adopté par Hansen, déduite des observations d'occultations d'étoiles.*

En comparant aux résultats des observations d'occultation ceux que donnent les observations de la Lune faites à l'altazimut et au cercle méridien de Greenwich, l'auteur arrive à partager en quatre classes principales les valeurs de la correction moyenne Δ qu'il faut apporter au demi-diamètre donné par Hansen :

1° Disparition d'étoiles derrière la portion obscure du disque : 35 observations ;

$$\Delta = -1'',70.$$

2° Disparition des étoiles derrière la portion lumineuse du disque : 11 observations ;

$$\Delta = +1'',81.$$

3° Réapparition des étoiles en avant de la portion obscure du disque : 10 observations ;

$$\Delta = -0'',36.$$

4° Réapparition des étoiles en avant de la portion éclairée du disque : dix observations ;

$$\Delta = +1'',31.$$

---

[1] Voir *Bulletin*, t. VII, p. 530.

Tout en tenant compte des difficultés spéciales qu'offrent les observations de la seconde et de la quatrième classe, on doit conclure de ces résultats que la question étudiée par M. Neison est loin d'être élucidée, et émettre le vœu que les occultations soient observées désormais partout aussi souvent que possible.

Stone (E.-J.). — *Sur le rejet des observations discordantes.*

Cet article est une réponse à celui que M. Glaisher a publié en avril 1873 sur le même sujet.

Neison (E.). — *Sur les limites de l'atmosphère lunaire possible.*

Auwers. — *Sur une variation admise dans le diamètre du Soleil.*

En réduisant les observations du Soleil, faites en 1808 et 1809 avec l'instrument des passages de l'Observatoire de Seeberg, Lindenau observa, dans les valeurs du diamètre solaire, des différences affectant un caractère périodique, qu'il ne put expliquer par des erreurs d'observations.

La discussion des observations méridiennes faites à Greenwich, de 1750 à 1755 et de 1765 à 1786, confirma cette première assertion, et l'ensemble de toutes ces discordances lui parut s'expliquer aisément en admettant que le Soleil était un ellipsoïde tournant autour de son grand axe avec un aplatissement de $\frac{1}{279}$ à $\frac{1}{140}$.

Bessel fit bientôt remarquer que toutes les variations observées par Lindenau s'expliquaient fort simplement en admettant un déplacement périodique du réticule de l'instrument par rapport au plan focal de l'objectif.

Depuis cette époque, la question fut longtemps laissée de côté. Elle fut reprise en 1871 à l'Observatoire du Collége Romain par les RR. PP. Secchi et Rosa, qui constatèrent, à l'aide d'observations régulières de passages, des variations considérables, présentant ce caractère que les époques de plus grands diamètres étaient aussi celles où le nombre des taches et des protubérances observées était moindre, et que le diamètre maximum ($32'3'',74$) était compris entre l'équateur solaire et $\pm 6^\circ$ de latitude héliographique, tandis que le diamètre minimum ($32'2'',18$) tombait entre $\pm 21^\circ$ et $\pm 23^\circ$ de latitude.

Cette question, dont l'importance est considérable pour le choix de la méthode à employer dans les observations du passage de Vénus, a été étudiée bientôt après par M. Auwers, directeur de l'Observatoire de Berlin. Comparant de fort nombreuses observations faites à Greenwich, Neuchâtel, Oxford, Washington, Paris, Königsberg et Bruxelles, M. Auwers arrive à cette conclusion, que les assertions du P. Secchi sur une variation du diamètre solaire « sont tout à fait dénuées de fondement, et que les changements remarqués par les deux astronomes italiens sont dus à des erreurs accidentelles d'observations ».

Auwers. — *Sur le mouvement propre de Procyon.*

La découverte, faite par M. Otto Struve, d'un petit compagnon à la belle étoile Procyon a engagé M. Auwers à déterminer à nouveau le mouvement propre de cette étoile, en se servant des observations les plus récentes. Celles qu'il a mises en œuvre proviennent de Greenwich, Édimbourg, Cambridge, Oxford, Paris, Bruxelles, Washington, Williamstown, Melbourne, Santiago, Cap de Bonne-Espérance, Genève et Leyde. Il trouva ainsi, pour Procyon, une orbite fort peu différente de celle qu'il avait trouvée autrefois, donnant pour l'étoile une révolution de $39,866^{\text{ans}}$, sur une orbite sensiblement circulaire et située dans un plan perpendiculaire à la ligne de visée.

Mais, quant à la cause perturbatrice, ces travaux n'ont pas conduit M. Auwers à confirmer la découverte de M. Otto Struve ; car, dans l'hypothèse d'un compagnon, l'angle de position de ce petit astre à l'époque de l'observation (1873,24) devrait être de $70°,8$, tandis que M. Struve le trouve alors égal à $87°,6$. Cette différence de $16°,8$ est quatre fois plus considérable que l'erreur probable de l'observation, et tendrait à infirmer la découverte de M. Struve. D'ailleurs M. Auwers fait remarquer que le printemps de 1874 sera très-favorable pour trancher cette question ; car, si l'objet observé par M. Struve est réellement la cause des perturbations observées dans le mouvement de Procyon, son angle de position sera d'environ 97 degrés à la fin de mars 1874, tandis qu'il ne sera que de 84 degrés si cet objet n'est qu'optiquement lié à l'étoile principale.

Ranyard (C.). — *Sur une nébulosité remarquable observée le* 26 *mai* 1828 *par Pastorff sur le disque solaire.*

Wilson (J.-M.) et Seabroke (G.-M.). — *Observations spectroscopiques du Soleil faites à l'Observatoire de l'École de Rugby.*

Ces observations, continuées du mois d'août 1871 à celui de décembre 1872, ont eu pour résultat principal de prouver que les protubérances solaires se montrent surtout dans la région équatoriale du Soleil, ou, en d'autres termes, qu'elles occupent sensiblement la même région que les taches.

Lassell (W.). — *Sur la détermination du temps par les observations faites au sextant.*

Lindsay (Lord) et Gill (D.). — *Description d'un nouveau mouvement d'horlogerie pour les instruments parallactiques.*

Bishop (G.). — *Observations des comètes périodiques de Tempel et de Brorsen.*

Plummer (W.-E.). — *Éléments paraboliques des comètes de Henry (Paris) et de Borrelly (Marseille).*

Luther. — *Éléments de la planète (134) Euphrosyne.*

Décembre 1873.

Pritchard (C.). — *Le nouvel Observatoire Savilien d'Oxford.*

M. Pritchard donne, dans cette Note, le plan de l'Observatoire d'Astronomie physique qu'il a réussi à faire créer à Oxford et l'indication des principaux instruments que cet établissement doit renfermer.

Après son entier achèvement cet Observatoire possédera :

1° Un équatorial de 12 pouces et un quart ($0^m,30$) d'ouverture;

2° Un instrument des passages de 4 pouces ($0^m,10$) d'ouverture et 5 pieds ($1^m,50$) de foyer, ainsi qu'une bonne pendule ;

3° Un altazimut dirigé dans le méridien et pouvant servir d'instrument des passages pour l'instruction des élèves ;

4° Un télescope de M. Warren de la Rue de 13 pouces ($0^m,32$) d'ouverture et 10 pieds ($3^m,00$) de foyer.

Birmingham (J.). — *Sur la variabilité probable de quelques étoiles rouges contenues dans la liste de Schjellerup.* (*Astr. Nachrichten*, n° 1591.)

Noble (W.). — *Sur l'étoile double ν de la Baleine.*

Le compagnon de cette étoile paraît avoir augmenté beaucoup d'intensité depuis les observations faites par l'amiral Smyth.

MARTH (A.). — *Sur la recherche des petites étoiles voisines d'Uranus.*

M. Marth propose de profiter des conditions favorables que présente l'opposition actuelle d'Uranus pour dresser des cartes exactes des portions du ciel qui avoisineront successivement cette planète, afin de trancher définitivement l'existence de ses satellites : cette question n'a pas été reprise soigneusement depuis Herschel, qui se servait d'un télescope de 20 pieds ($6^m,00$).

BURNHAM (W.). — *Troisième Catalogue de 76 étoiles doubles.*

L'habile astronome américain, M. Burnham, publie les positions de 76 étoiles doubles nouvelles, découvertes par lui à Chicago avec un objectif de 6 pouces ($0^m,15$) d'ouverture, construit par Alvan Clark. Pour montrer la bonté de l'instrument dont il se sert, nous dirons qu'il dédouble avec lui des étoiles distantes de $0'',8$; $0'',7$; $0''5$ et même $0'',4$.

TEBBUTT (J.). — *Observations de l'éclipse totale de Lune du 12 mai 1873, ainsi que du troisième satellite de Jupiter.*

Ces observations ont été faites à Windsor (Nouvelle-Galles du Sud, Australie), avec un équatorial de 4 pouces et demi ($0^m,10$) d'ouverture.

STEPHAN (E.). — *Nébuleuses découvertes et observées à Marseille.*

PLUMMER (W.-E.). — *Éléments de la comète II, 1873.*

MARTH (A.). — *Liste supplémentaire d'étoiles voisines de la Voie lactée.*

PRINCE (C.-L.). — *Sur la position et la grandeur d'étoiles situées entre ε et 5 Lyre.*

NEWCOMB (S.). — *Tables d'Uranus.*

M. Hind annonce que, pour le *Nautical* de 1877, il se servira des Tables nouvelles d'Uranus que vient de construire M. Simon Newcomb.

Janvier 1874.

Airy (G.-B.). — *Sur une nouvelle méthode proposée pour traiter le problème de la théorie de la Lune.*

Burnham (W.). — *Note additionnelle relative aux étoiles doubles de sir William Herschel.*

Hind (R.). — *Sur une occultation de Régulus par Vénus, en l'an* 885.

Dans le manuscrit de l'ouvrage de l'astronome arabe Ibn-Jounis, rapporté par Delambre (*Astronomie du moyen âge*, p. 76), on trouve que Régulus a été occulté par Vénus à une date qui correspond au 9 septembre de l'année 885 du calendrier julien.

M. Hind a examiné cette observation au moyen des Tables solaires et planétaires de M. Le Verrier; et, en supposant que l'observation ait été faite à Bagdad, il trouve qu'elle a eu lieu le 9 septembre à $16^h 50^m$, c'est-à-dire une heure avant le lever du Soleil, ainsi que l'indiquait l'astronome arabe. Il faut en conclure que les Tables de M. Le Verrier représentent bien les lieux de Vénus un millier d'années avant leur construction.

Burton (C.-E.). — *Sur la dimension présente de la tache blanche du cratère de Linné.*

Huggins (W.). — *Sur le cratère de Linné.*

Des observations de ces deux astronomes il paraît résulter que, si le petit cratère qui occupe le centre de Linné ne subit aucun changement, la grande tache brillante qui l'entoure varie de diamètre d'une façon considérable.

De $7'',85$ de diamètre qu'elle avait en 1867, elle est réduite à $4'',0$ en juin 1873.

Christie (W.-M.). — *Sur un nouveau photomètre destiné à mesurer la couleur et l'éclat des étoiles.*

Les principales questions qu'a à résoudre la photométrie stellaire et planétaire sont :

1° Déterminer l'intensité et la couleur de la lumière émanant d'un astre;

2° Obtenir une échelle fixe pour l'évaluation de son éclat;

3° Comparer les couleurs des différentes portions du disque de la Lune et des planètes.

M. Christie les résout à l'aide du photomètre suivant :

Au sortir de l'oculaire de l'équatorial, le faisceau de rayons parallèles venant de l'astre tombe sur l'une des moitiés d'une lentille, divisée comme l'objectif d'un héliomètre, et de là dans l'œil de l'observateur placé en son foyer ; l'autre moitié de la lentille reçoit, au moyen d'une série de prismes à réflexion totale et d'une lentille collimatrice, les rayons venant de trois fentes formant des sources lumineuses rouge, verte et bleue, dont les rayons ont une réfrangibilité connue.

Au moyen de manettes, placées à sa portée, l'observateur peut varier à volonté l'ouverture de chacune de ces fentes et par conséquent obtenir, avec la seconde moitié de la lentille, une surface lumineuse de coloration et d'intensité arbitraires [1], surface lumineuse qu'il peut d'ailleurs mettre en contact de celle que donne l'astre à observer.

L'instrument de M. Christie a été adapté, à la fin de 1873, au grand équatorial de l'Observatoire de Greenwich, et il a conduit à des résultats très-satisfaisants.

Lecky (R.-J.). — *Sur un ancien astrolabe.*

Airy (G.-B.). — *Observations des occultations et des phénomènes des satellites de Jupiter, faites à Greenwich en* 1873.

Burton (C.-E.). — *Observations d'étoiles doubles.*

M. Burton indique les résultats de ses observations, faites avec un télescope newtonien de 12 pouces et un micromètre à fils, sur Castor, ξ du Cancer, ξ de la Grande Ourse et 32 d'Orion. Les grossissements employés étaient de 400 et de 940.

Stephan (E.). — *Observations de la comète de M. Faye* (*comète VI,* 1873), *faites à l'Observatoire de Marseille.*

Wilson (J.-M.). — *Sur les positions de petites étoiles voisines de* ε *de la Lyre.*

Oppenheim (H.). — *Nouveaux éléments de la planète* (110) *Lydie.*

---

[1] *Clerk Maxwell's Colour-box* (*Philosophical Transactions for* 1860).

Février 1874.

Nous donnerons à part l'analyse de ce numéro, qui renferme le compte rendu de la séance générale annuelle des membres de la Société Royale Astronomique.

Mars 1874.

Rosse (Lord). — *Sur des dessins chromolithographiques de Jupiter, faits à l'aide des observations au télescope de 6 pieds d'ouverture de l'Observatoire de Parsonstown, en* 1872 *et* 1873.

L'étude des changements que présente la surface du disque de la planète Jupiter offre un grand intérêt. Lord Rosse a pensé à y appliquer, pendant l'opposition de 1873, son grand télescope de 6 pieds ($1^m,80$) d'ouverture, auquel il a depuis peu fait adapter un mouvement d'horlogerie. Les observations ont été faites lorsque le ciel était beau, avec un grossissement de 414 fois; pour des états moins favorables de l'atmosphère, on a employé des grossissements de 281 et même 120 fois, qui donnaient alors des images beaucoup plus nettes que le premier. Elles ont été réunies dans des dessins chromolithographiques, où le diamètre équatorial de Jupiter est de 50 millimètres; l'aplatissement adopté est celui que donne le *Nautical Almanac,* où le rapport du diamètre polaire au diamètre équatorial est de

$$0,927.$$

Les deux conclusions les plus importantes auxquelles conduit l'étude des dessins de M. Ralph Copeland, astronome de lord Rosse, sont les suivantes :

1° Tandis que les portions australes et équatoriales de Jupiter [1] furent, pendant l'opposition de 1873, soumises à de très-grandes variations, la région boréale et, en particulier, la grande bande noire qui divise en deux parties cette région sont restées presque invariables [2].

---

[1] Nous signalerons surtout la grande brèche qui s'est produite dans le côté sud de la bande équatoriale.

[2] C'est la bande désignée sous le n° 4 par Wilhelm Beer et J.-H. Mädler : voir *Beiträge zur physischen Kenntniss der himmlischen Körper im Sonnensystem.*

2° La grande bande équatoriale qui était très-franchement colorée en rouge dans l'opposition de 1870, à tel point qu'elle affectait toute la planète d'une coloration sensible, a été toujours presque incolore pendant l'opposition de 1873.

3° En admettant pour vitesse de rotation de l'équateur de Jupiter le nombre donné par Schmidt (*Astronomische Nachrichten*, n° 1973), de 40211 pieds de Paris (13062 mètres) par seconde, R. Copeland obtient pour la valeur du mouvement propre des taches de Jupiter des nombres compris entre +25,6 et +35,1 pieds ($+8^{m},1$ et $+11^{m},4$) par seconde, soit 17 à 23 milles par heure, nombres qui concordent sensiblement avec ceux de Mädler.

Ajoutons enfin que les observations de Parsonstown sont aussi concordantes que possible avec celles de M. Terby, à Louvain, et de M. Knobel, à Stapenhill [1].

Johnson (S.-J.). — *Sur deux anciennes conjonctions de Mars et de Jupiter.*

Barneby (Th.). — *Sur les grandeurs relatives de la cinquième et de la sixième étoile du trapèze d'Orion.*

Cet astronome, dont l'Observatoire, établi à Morton-House (Worcester), a pour instrument principal un équatorial de 9 pouces ($0^{m},23$) de Cooke, signale la variabilité rapide de la seconde de ces deux étoiles.

Birmingham (J.). — *Seconde Note sur la variabilité probable de quelques-unes des étoiles rouges de la liste de Schjellerup.* (*Astronomische Nachrichten*, n° 1591.)

Johnson (S.-J.). — *Sur la lumière zodiacale.*

Knobel (E.-B.). — *Sur la lumière zodiacale.*

Ces deux observateurs signalent les belles apparitions de lumière zodiacale constatées en Angleterre dans les mois de janvier et de février 1874. Ces apparitions ont ceci d'inusité, que la lumière zodiacale n'est ordinairement visible dans nos contrées qu'au printemps, en mars et avril. D'ailleurs la lumière avait, dans les apparitions dont nous parlons, un éclat comparable à celui de la Voie lactée.

---

[1] *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, vol. XXXVI, 1873, n° 11. — *Monthly Notices*, vol. XXXIII, p. 474.

Langley (S.-P.) — *Sur la photosphère solaire.*

M. Langley poursuit à l'Observatoire d'Allegheny (Pensylvanie, États-Unis) une étude télescopique directe de la surface du Soleil. L'instrument dont il se sert est un équatorial de 13 pouces ($0^m,33$) d'ouverture, auquel l'emploi d'un oculaire polarisant permet de laisser toute son ouverture libre [1].

L'étude des formes affectées par les filaments, *feuilles de saule* (Nasmyth), *pailles de chaume* (Dawes), *grains de riz* (Stone; il se servait du grand équatorial de 12, 8 pouces de l'Observatoire de Greenwich), *granules* (Huggins) qui tapissent la surface du Soleil, a, en effet, une incontestable utilité pour la recherche du caractère et de la direction des courants de la photosphère dont le spectroscope a démontré à MM. Lockyer, Huggins, Janssen, Rayet et autres, l'incontestable existence, et que M. Faye étudie avec tant de soin.

Malheureusement les observations de M. Langley ne paraissent point l'avoir amené à une conclusion certaine; son impression, toutefois, est que ces filaments se meuvent presque constamment comme s'ils faisaient partie d'un courant dirigé de bas en haut.

Mais un point de fait important qu'il est bon de signaler, car il a eu son analogue dans l'histoire de l'étude des *taches solaires*, est le suivant : dans ceux de ces filaments que M. Dawes appelle des *pailles de chaume*, cet habile observateur avait signalé l'existence d'un noyau *excessivement noir*. M. Langley contredit complétement l'assertion de M. Dawes : quoiqu'il n'ait pu faire de mesures photométriques directes, il croit pouvoir affirmer que cette portion est bien loin d'être noire, dans le sens réel du mot; mais qu'au contraire elle brille d'une vive lumière violet pourpre.

Lewis (J.-N.). — *Sur le calcul approché des éclipses de Soleil.*

Christie (H.-M.). — *Sur la courbure des lignes de dispersion du spectre et le moyen de la corriger.*

Dans un spectre obtenu par les moyens ordinaires avec un spectroscope, les lignes sont toujours courbes, et il est impossible de les débarrasser de cette courbure par un arrangement convenable des prismes. D'après M. Christie, ce point n'a pas encore été étudié,

---

[1] En France, ce problème a depuis quelques années été résolu d'une façon beaucoup plus simple et plus commode par l'argenture d'une des surfaces de l'objectif.

malgré son importance; ses calculs le conduisent à la solution suivante.

Après leur passage à travers l'ensemble des prismes, les rayons doivent être réfléchis par un miroir plan; ils forment, à peu de distance de la fente, une image latérale qu'on peut apercevoir avec un prisme diagonal; la course du faisceau des rayons étant renversée, la courbure des lignes de dispersion est corrigée par le second passage à travers les prismes, et la dispersion est la même que si le faisceau de rayons avait traversé un système formé par les prismes eux-mêmes et d'autres occupant la place de leurs images réfléchies données par le miroir plan.

Ce procédé est adopté dans le spectroscope actuellement en usage à l'Observatoire royal de Greenwich, et les images obtenues sont parfaitement rectilignes.

Penrose (F.-C.). — *Sur une méthode pour obtenir le tracé de la parabole par un mouvement continu, et sur son application à la construction des miroirs.*

Cette Note renferme une application du bel appareil du colonel Peaucellier, déjà indiquée par M. Sylvester.

Pringle (E.-H.). — *Sur quelques observations spectroscopiques de Sirius, η Argûs, etc.*

Ces observations ont été faites à Mangalore (South-Canara, Australie), avec un spectroscope composé de deux prismes de flint-glass dense, d'angle réfringent de 60 degrés, adapté à un télescope dont le miroir en verre argenté avait $6\frac{1}{2}$ pouces ($0^m,17$) de diamètre.

Lecky (R.-J.). — *Sur une détermination des longitudes par les chronomètres.*

Avril 1874.

Abney (W. de W.). — *Sur un collodion sec pour la Photographie solaire.*

Lindsay (Lord) et Gill (D.). — *Sur la détermination de la parallaxe solaire par les observations de Junon à son opposition.*

Ces deux astronomes rendent compte des expériences qu'ils ont faites en vue de s'assurer de la précision de la méthode proposée

autrefois par M. Galle, de Breslau [1], pour la détermination de la parallaxe solaire, méthode qu'ils se proposent d'appliquer à l'île Maurice, dans le cours de leur préparation au passage de Vénus. Leurs expériences ont surtout porté sur les étoiles du beau groupe de Persée, qu'on observait en même temps au cercle méridien de l'Observatoire de Greenwich; elles les ont conduits à cette conclusion, que, avec des observations de ce genre bien conduites, l'erreur résultant sur la parallaxe solaire doit être moindre que celle que donnerait toute autre méthode, et au plus égale à $0'',017$.

Cayley (A.). — *Sur le nombre de termes distincts dans un déterminant symétrique ou partiellement symétrique.*

Tisserand. — *Observations des éclipses des satellites de Jupiter faites à l'Observatoire de Toulouse en* 1874.

Ces observations ont été faites à la fois par M. Tisserand et M. Perrotin, son aide-astronome. Le Tableau que M. Tisserand publie montre bien les différences qui peuvent être obtenues dans deux observations d'un même phénomène de ce genre faites avec deux instruments différents ($0^m,10$ et $0^m,15$ d'ouverture). Le 30 janvier par exemple, pour la disparition du quatrième satellite, la différence des temps donnés par les deux observateurs s'élève à 35 secondes.

Denning (W.-F.). — *Observations faites à l'œil nu des satellites de Jupiter.*

M. Denning signale les variations d'éclat véritablement extraordinaires du quatrième satellite de Jupiter, et dit que, dans la nuit du 3 avril, à $10^h 1^m$, il a vu très-distinctement, *à l'œil nu,* le troisième et le quatrième satellite de cette planète.

Mai 1874.

Glaisher (W.-L.). — *Sur la résolution des équations dans la méthode des moindres carrés.*

Struve (O. v.). — *Suite des observations du Compagnon de Sirius.*

MM. Struve et Lindenau ont continué, pendant le printemps

---

[1] Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, tome III, 1872, p. 274.

de cette année, leurs observations du Compagnon de Procyon. Les seules nuits favorables à l'observation furent celles des 21 mars, 9, 13, 14 et 15 avril. De l'ensemble de ces observations il résulte, pour position du Compagnon par rapport à l'étoile au 10 avril 1874 :

Distance..................	11″,67
Angle de position..........	99°,60

Les observations de l'année précédente avaient donné, pour le 28 mars 1873 :

Distance..................	12″,49
Angle de position..........	90°,24

L'angle de position a donc augmenté de 9°,5 pendant l'intervalle d'une année, jusqu'à devenir égal à 97 degrés environ, ce qui est conforme aux calculs faits récemment par M. Auwers. (*Voir* plus haut l'article de M. Auwers sur le même sujet). Cette variation dans l'angle de position doit correspondre, il est vrai, à un déplacement linéaire considérable du Compagnon, se montant à environ 2″,0, et qui ne serait point accusé par l'observation même, puisque la distance des deux astres n'a varié que de 0″,8; mais il faut remarquer que les mesures de distances sont infiniment moins précises que les mesures de directions.

D'ailleurs, pendant que MM. Struve et Lindenau poursuivaient leurs observations à Poulkova, M. Tseraski, assistant de l'Observatoire de Moscou, réussissait à voir aussi le Compagnon à la même place que les astronomes de Poulkova, et sans avoir été averti du succès de leurs recherches.

L'existence du Compagnon de Procyon paraît donc désormais rigoureusement démontrée.

NIVEN (C.). — *Sur une méthode destinée à faire connaître les parallaxes des étoiles doubles, et sur le déplacement des lignes du spectre des planètes.*

M. Huggins, reprenant une idée émise autrefois par Doppler, a montré expérimentalement que, si une étoile s'éloigne ou se rapproche de la Terre avec une vitesse de 20 milles par seconde, il en résulte dans le spectre de cette étoile, pour la ligne F de l'hydrogène, un déplacement d'environ $\frac{1}{12}$ de la distance qui sépare

les deux composantes de la double ligne du sodium, vers le rouge dans le premier cas et vers le violet dans le second, déplacement parfaitement appréciable avec le spectroscope. M. Niven recherche si une pareille méthode ne pourrait point s'appliquer à la détermination des parallaxes des systèmes doubles. Les difficultés que peut présenter un pareil mode d'observation peuvent tenir aux causes suivantes :

1° Le faible éclat des étoiles en question et leur peu d'écartement angulaire.

Or M. Huggins a montré [1] qu'il pouvait examiner séparément les deux composantes de β du Cygne, dont l'une est de 3ᵉ grandeur et l'autre de 7ᵉ, et dont la distance est de $4'',6$, ainsi que les composantes de α d'Hercule de 3ᵉ et 6ᵉ grandeur, et dont la distance était, au commencement de 1869, d'environ 6 secondes.

2° La petitesse de leur déplacement relatif, qui serait au-dessous de la sensibilité du procédé de mesure.

Or prenons comme exemple l'étoile α du Centaure. En adoptant pour sa parallaxe la valeur $0'',913$ et les anciens éléments calculés par le capitaine Jacob, nous trouvons que la vitesse maximum de rapprochement de l'étoile et du Compagnon est de 12,566 milles, tandis que la vitesse maximum d'éloignement est de 25,85 milles par seconde ; avec les éléments donnés plus récemment par M. Powell, ces deux vitesses seraient respectivement de 6,82 et 20,41 milles, et actuellement les deux astres s'éloigneraient l'un de l'autre avec une vitesse d'environ 17,43 milles par seconde.

Ces considérations montrent que, dans un certain nombre de cas, la méthode proposée par M. Niven peut recevoir son application. Or, en désignant, comme d'habitude, par

a, e, N, i et ϖ les éléments de l'orbite que décrit le Compagnon;

θ la distance angulaire actuelle du Compagnon à l'un des nœuds de son orbite, distance comptée sur cette orbite;

T le temps de la révolution exprimé en années;

D le diamètre de l'orbite terrestre;

n le nombre de secondes contenues dans une année;

p la parallaxe de l'étoile;

---

[1] *Philosophical Transactions*, fév. 1864.

W la composante de la vitesse relative des deux astres, mesurée à partir de la Terre sur la droite qui joint celle-ci au système binaire, évaluée en milles et rapportée à la seconde comme unité de temps,

M. Niven obtient, au moyen d'un calcul relativement simple, la relation suivante, qui se rapporte au cas où le mouvement du Compagnon dans son orbite apparente est *direct*,

$$pW = \frac{2\pi a \sin i}{Tn\sqrt{1-e^2}} D(\cos\theta + e\cos\varpi);$$

d'où il résulte que, si l'on connaît les éléments de l'orbite que décrit le Compagnon autour de l'étoile principale et si, au moyen du spectroscope, on a mesuré la valeur de la composante W, on peut obtenir la parallaxe p.

M. Niven ajoute une Table indiquant quelques-unes des étoiles actuellement les plus favorables pour l'observation.

Warren de la Rue. — *Sur une pièce de l'appareil destiné à appliquer la méthode de M. Janssen pour l'enregistrement photographique des instants des contacts pendant le passage de Vénus.*

L'appareil même employé par M. Janssen, et qu'il a décrit dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, est plus simple que le mécanisme proposé par l'illustre astronome anglais.

Capello (J.). — *Sur un appareil destiné à l'enregistrement photographique du temps pendant le passage de Vénus.*

La même remarque s'applique à cet appareil.

Neison (E.). — *Sur le diamètre lunaire déduit des observations d'occultations d'étoiles.*

La réduction des observations faites à Greenwich, depuis 1861 jusqu'à 1870, a montré que le diamètre de la Lune, déduit des occultations d'étoiles, était considérablement moindre que la valeur donnée par Hansen; mais, pour obtenir un résultat certain, il est utile de comparer entre elles les observations faites avec des instruments de différentes ouvertures. Dans ce but, on dispose, outre celles de Greenwich, faites avec une ouverture de 6 pouces ($0^m,15$), des observations de l'Observatoire de Radcliffe avec une ouverture de 7,5 pouces ($0^m,20$), s'étendant de 1862 à 1872, et des observations

faites à Cambridge, de 1861 à 1871, avec un instrument de 11 pouces ($0^m,27$) d'ouverture. Leur comparaison, d'où l'on a exclu toutes les observations de réapparition qui sont trop incertaines, conduit aux valeurs suivantes de la correction qu'il faut apporter à la valeur donnée par Hansen :

	Disparition derrière la portion obscure du limbe.	Nombre d'observations.	Disparition derrière la portion lumineuse du limbe.	Nombre d'observations.
Greenwich ($0^m,15$)....	$-1'',73$	42	$+1'',06$	12
Radcliffe ($0^m,20$)......	$-1,81$	30	$+0,52$	13
Cambridge ($0^m,27$)....	$-1,95$	14	$-0,01$	3

Ce tableau prouve : 1° que, dans l'observation de la disparition derrière la partie lumineuse du disque, la correction va graduellement en décroissant à mesure que l'ouverture augmente; 2° qu'au contraire, dans les observations de disparition derrière la portion obscure du disque, la correction va au contraire graduellement en augmentant à mesure que l'ouverture augmente, mais dans une proportion bien moindre que la diminution du cas précédent. Ce fait est digne de remarque.

Maxwell Hall. — *Sur les systèmes solaires et planétaires.*

L'auteur donne un nouvel énoncé de la loi de Bode, qui peut se résumer dans les deux propositions suivantes :

1° Dans les systèmes solaires et planétaires, les distances moyennes des planètes au Soleil et des satellites aux planètes ne peuvent guère différer des termes de la série

$$4\lambda,\quad 7\lambda,\quad 10\lambda,\quad 16\lambda,\quad 28\lambda,\quad 52\lambda,\quad 100\lambda,\quad 196\lambda,\ldots,$$

dont la loi est évidente, et où λ a une valeur différente pour chaque système.

2° Si l'on suppose λ évalué en milles, sa valeur pour les différents systèmes est

$$\lambda = 1580\,M^{\frac{1}{3}}P^{\frac{2}{3}},$$

où M est la masse du corps central rapportée à celle de la Terre et

P est, en heures, la durée de la rotation de ce corps autour de son axe.

Brett (J.). — *Observations de Jupiter faites pendant le mois d'avril* 1874.

Gledhill (J.). — *Taches brillantes sur Jupiter.*

L'auteur signale trois taches très-brillantes aperçues par lui, le 23 avril, autour du pôle sud de Jupiter, à l'Observatoire de M. Edward Crossley, à Skircoat (Halifax).

Juin 1874.

Zenger (C.-V.). — *Sur l'application de la Photographie à l'observation du passage de Vénus.*

Les conclusions auxquelles arrive l'astronome de Prague sont les suivantes :

1° Il n'y a pas lieu de se servir de la Photographie pour obtenir les instants des contacts, car alors l'exactitude est entièrement détruite par les effets d'interférence.

2° Il serait préférable d'avoir une série de photographies successives du passage, de façon à pouvoir assurer l'instant où Vénus passe par un méridien déterminé de la surface du Soleil. Il est, en effet, possible d'agrandir les photographies du Soleil jusqu'à leur donner 110 pouces ($2^m,79$), ainsi qu'il résulte des expériences de M. Zenger, sans leur faire perdre leur netteté. Chaque pouce correspondrait alors environ à $1'',7$; on pourrait donc, en évaluant le centième de pouce, obtenir la position de Vénus sur le disque solaire à $0'',017$, soit à $0^s,001$.

Ranyard (C.). — *Sur un phénomène remarquable aperçu pendant l'éclipse solaire du* 12 *décembre* 1871.

Burnham (S.-W.). — *Réponse à la Note de sir John Herschel sur ses observations d'étoiles doubles. Quatrième Catalogue de quarante-sept étoiles doubles nouvelles, découvertes avec un équatorial de* 6 *pouces d'Alvan Clark.*

Bidder (G.-P.). — *Sur une nouvelle forme de micromètre de position.*

Cet instrument, dont le but principal est d'obtenir un éclairement des fils sur champ obscur pour la mesure des astres faibles,

ne diffère pas sensiblement de ceux qui sont généralement adoptés dans le même but.

Herschel (J.). — *Sur un procédé de fixage des fils d'araignée dans les collimateurs et les instruments de passage.*

Knobel (E.-B.). — *Observations de Jupiter, faites en* 1874.

Birmingham (J.). — *Troisième Note sur la variabilité probable de quelques-unes des étoiles rouges du Catalogue de Schjellerup* (*Astronomische Nachrichten*, n° 1591).

Perry (J.). — *Phénomènes des satellites de Jupiter, observés à l'Observatoire de Stonyhurst de mai* 1873 *à mai* 1874.

Ces observations ont été faites avec un équatorial de 8 pouces ($0^m,20$) d'ouverture.

Main (R.). — *Occultations et phénomènes des satellites de Jupiter, observés à Oxford en* 1874.

Tebbutt (J.). — *Occultations et phénomènes des satellites de Jupiter, observés à Windsor* (*Nouvelle-Galles du Sud, Australie*).

Ces observations ont été faites avec un équatorial de 4,5 pouces ($0^m,11$) d'ouverture.

Fasel (V.). — *Observations de la lumière zodiacale faites à Morges* (*Suisse*).

Juillet 1874.

Glaisher (W.-L.). — *Rapport sur la Table de logarithmes, à douze figures, des nombres de* 1 *à* 120000, *calculés par John Thomson.*

Ce remarquable Rapport renferme, outre une étude de la Table de Thomson, une comparaison détaillée des principales Tables actuellement en usage et une liste des erreurs qu'elles renferment.

Powalky (C.). — *Sur la combinaison des différents résultats obtenus avec diverses séries d'observations.*

Berg (F.-W.). — *Sur l'influence des erreurs d'observations sur la détermination de l'orbite d'une planète au moyen de trois observations.*

WILSON (J.-M.). — *Note sur Sirius.*

Les observations spectroscopiques montrent que la masse de Sirius est beaucoup moins grande par rapport à celle du Soleil que son éclat par rapport à celui de cet astre, ou, en d'autres termes, que l'éclairement intrinsèque de Sirius est beaucoup plus grand que celui du Soleil. Les observations directes conduisent à la même conclusion. En effet, en se fondant sur les Tables qu'a faites M. Gledhill en 1863, 1865 et 1866, et adoptant pour parallaxe de Sirius la valeur 0″, 22, 200 ans pour durée de la révolution de son Compagnon et 11 secondes pour leur distance moyenne, on trouve que la distance de Sirius à son Compagnon est cinquante fois plus grande que celle du Soleil à la Terre, et que, par suite, la masse de Sirius est égale à $\frac{\overline{50}^3}{\overline{200}^2}$ celle du Soleil, c'est-à-dire trois fois et demie la masse du Soleil. Or la quantité de lumière émise par Sirius est environ deux cents fois plus forte que celle qu'émet le Soleil; il en résulte donc, à moins d'erreurs considérables sur les éléments adoptés plus haut, que Sirius a un éclairement intrinsèque beaucoup plus grand que celui du Soleil, et que, par conséquent, il se trouve, comme le montre le spectroscope, à une température beaucoup plus élevée.

CHRISTIE. — *Observations spectroscopiques et méridiennes de la comète de Coggia.*

Ces observations, faites avec le grand équatorial de l'Observatoire de Greenwich, ont montré que le spectre de cette comète avait les mêmes caractères généraux que celui de la plupart des autres, et que la lumière de sa chevelure était polarisée partiellement dans un plan passant par l'axe de celle-ci. C. A.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN [1].

T. LXXIX; (suite et fin); nos 1887-96 (1872).

JORDAN (W.). — *Sur la détermination de l'erreur moyenne par la répétition des observations.*

---

[1] Voir *Bulletin*, t. VI, p. 166.

Soit x une inconnue dont on a obtenu plusieurs déterminations $a_1, a_2, \ldots, a_m$ par m observations d'égale valeur. On prend pour sa valeur probable la moyenne arithmétique $x_0 = \frac{[a]}{m}$.

Soient, en outre, r *l'erreur probable* d'une observation particulière et R *l'erreur probable* du résultat x_0; on a

$$r = R\sqrt{m}, \quad \text{et} \quad r = \alpha_n \sqrt[n]{\frac{[\Delta]}{m}} \left(1 \pm \frac{\beta_n}{\sqrt{m}}\right).$$

Dans cette dernière formule, due, comme on sait, à Gauss, Δ désigne l'une quelconque des *vraies* erreurs d'observation; α_n et β_n sont des coefficients constants dont les valeurs numériques ont été calculées pour chaque valeur particulière de n; comme, d'ailleurs, les quantités Δ sont inconnues, on les remplace habituellement par les erreurs rapportées à la valeur probable.

Gauss ayant signalé lui-même la nécessité de perfectionner cette méthode, M. Jordan avait proposé la modification suivante, dans les nos 1766-67 des *Astronomische Nachrichten*. En désignant par d l'une quelconque des différences positives des observations prises deux à deux, différences qui sont évidemment au nombre de $\mu = \frac{1}{2} m(m-1)$, ce géomètre avait cherché à établir qu'à la formule de Gauss il serait avantageux de substituer la suivante :

$$r = \frac{\alpha_n}{\sqrt{2}} \sqrt[n]{\frac{[d_n]}{\mu}} \left(1 \pm \frac{\beta_n}{\sqrt{\mu}}\right),$$

α_n et β_n conservant les mêmes valeurs numériques.

Mais peu après (n° 1770), M. v. Andræ avait contesté l'exactitude de cette formule multiple, en se fondant sur ce que la démonstration de M. Jordan supposait à tort que les différences $d_1, d_2, \ldots$ étaient *indépendantes* les unes des autres.

Aujourd'hui M. Jordan montre directement la justesse de l'un des principaux résultats qu'il a déduits précédemment du développement de sa formule, et il en conclut que ce développement n'est pas entièrement inexact, ainsi que l'a prétendu M. v. Andræ.

Andræ (v.). — *Réponse à la Note précédente.* (N° 1839.)

M. v. Andræ répond qu'il n'a rien à modifier dans ses critiques

antérieures. Il fait remarquer seulement l'extrême importance qu'auraient les formules de M. Jordan si elles étaient exactes, puisqu'elles diminueraient en moyenne l'erreur probable donnée par les formules de Gauss dans le rapport de $\sqrt{\frac{m-1}{2}}$ à 1. Ce fait seul est une preuve de leur invraisemblance.

Quant à l'idée fondamentale de M. Jordan, de considérer les *différences* au lieu des *erreurs*, elle est digne d'attention, et en conséquence M. v. Andræ étudie en elles-mêmes les formules de ce géomètre, dans les deux cas les plus importants, ceux où $n = 1$ et $n = 2$. Pour $n = 2$, on peut faire voir que la formule de M. Jordan se ramène à celle de Gauss, tout en exigeant un calcul plus long. Pour $n = 1$, cette même formule peut être employée sans désavantage, *pourvu que l'on détermine préalablement les coefficients* α *et* β. M. v. Andræ donne cette détermination, et il trouve que la formule doit définitivement s'écrire

$$r = 0{,}5978 \frac{[d]}{\mu} \left(1 \pm \frac{0{,}482 + \frac{1}{m} 0{,}055}{\sqrt{m-1}} \right).$$

Luther (R.). — *Observations au cercle micrométrique de l'Observatoire de Düsseldorf.*

Watson (J.-C.). — *Découverte de la planète* (119), *à Ann Arbor.*

Möller (Axel). — *Observation de cette même planète à Lund.* — *Observations d'autres planètes et de comètes.*

Pechüle (C.). — *Observations, éléments et éphémérides de la planète* (119).

Bruhns (C.). — *Observation de la planète* (120), *à Leipzig.*

Dembowski. — *Observations d'étoiles variables.*

Newcomb (S.). — *Lettre au rédacteur.* (Angl.)

Dans cette lettre, M. Newcomb appelle l'attention des astronomes sur l'occasion favorable que la prochaine opposition de Polhymnie (33) va leur offrir pour la détermination de la masse de Jupiter. La petite planète sera alors, en effet, voisine de son péri-

hélie, ce qui réduira sa distance à la Terre à 0,89, de sorte que l'action de Jupiter amènera dans sa position *géocentrique* des perturbations de plus de 1 degré.

M. Hill avait déjà fait observer, dans les *Mémoires de l'Académie Américaine,* les avantages que pouvaient offrir, pour la détermination de la masse de Jupiter, les planètes animées d'un moyen mouvement à peu près double; mais ces perturbations ont en général des périodes de plus de 60 ans et ne pourraient servir avant la fin du siècle.

A ce propos, M. Watson signale une exception curieuse à la remarque faite par M. Kirkwood, qu'il existe des lacunes dans le groupe des petites planètes, aux moyennes distances correspondantes à une durée de révolution qui serait une fraction simple de la durée de révolution de Jupiter. Six lacunes de plus de 50 jours correspondent respectivement aux fractions $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$ et $\frac{1}{2}$. Mais il n'y a pas de lacune correspondante à $\frac{3}{8}$. Au contraire, la période de Héra (103) est si voisine de cette fraction qu'on ne peut apprécier la différence. En outre les périodes de Concordia et d'Alexandra sont toutes les deux extrêmement rapprochées de ce même nombre.

Hall (A.). — *Observations du compagnon de Sirius faites à l'Observatoire naval de Washington.*

Metzer (E.). — *Lettre au Rédacteur.*

Cette lettre, écrite de Java, est accompagnée d'épreuves photographiques de l'éclipse totale du 12 décembre 1871.

Schultz (H.). — *Observations de la comète d'Encke.*

Jäderin (E.). — *Observations d'Ariane et d'Égérie au réfracteur d'Upsala.*

Schmidt (J.-F.-J.). — *Observations d'étoiles variables.*

Becker (E.). — *Observations de Peitho* (118).

Peters (C.-H.-F.). — *Découverte de la planète* (120).

M. Peters signale, par occasion, une nouvelle étoile variable, dont la position pour 1872,0 est

$$\alpha = 11^h 55^m 17^s,5, \quad \delta = +9^\circ 47' 4''.$$

Cette étoile est si voisine d'une autre beaucoup plus petite qu'on

peut croire qu'elles constituent un système binaire. Si des observations ultérieures confirment ce soupçon, on aura là un remarquable exemple d'un système à la fois double et variable.

ARGELANDER. — *Lettre au Rédacteur.* (N° 1894.)

Dans cette lettre, M. Argelander confirme la variabilité de l'étoile signalée par M. Peters.

PECHÜLE (C.-F.). — WEISS (E.). — *Observations des planètes* (119) et (120).

ZENKER (W.). — *Sur les conditions physiques et le développement des comètes.* (34 col.)

Les idées exposées dans ceti important Mémoire, bien que sujettes à beaucoup d'objections, sont cependant au plus haut degré dignes de l'attention des astronomes et des physiciens.

L'auteur commence par insister sur l'importance d'une théorie cométaire, non-seulement pour grouper les faits déjà connus, mais aussi pour assigner aux observations à venir un objectif qui augmente à la fois leur précision et leur utilité. Telle était, au reste, l'opinion de Bessel.

M. Zenker passe rapidement en revue les théories déjà connues : celle de Newton, qui compare les vapeurs dont est formée la queue des comètes à la fumée qui s'élève dans l'air par sa légèreté spécifique; celle de Lehmann, qui assimile ce phénomène à celui des marées; celle de Tyndall, qui attribue l'apparition de la queue à une action chimique produite par les rayons solaires qui traversent la tête sur un milieu hydrocarboné répandu tout autour du Soleil, à d'immenses distances. Après avoir rappelé rapidement les objections que l'on a faites à ces diverses théories, M. Zenker s'arrête plus longtemps à l'hypothèse toute récente proposée par M. Zöllner.

Les astronomes admettent généralement aujourd'hui que la figure des comètes est due à une action répulsive, soit réelle, soit apparente, de la part du Soleil. M. Zöllner croit à la réalité de cette action; il admet que le Soleil et la comète sont chargés de la même espèce d'électricité et qu'il résulte de là une répulsion mutuelle à travers l'espace. M. Zenker se demande d'où pourrait provenir cette électricité solaire. S'il y a un développement continu, par frottement par exemple, les deux électricités contraires doivent naître en quantités égales, et, par suite, n'exercer sur les corps

éloignés qu'une action à peu près nulle. Pour que l'une des deux restât seule en excès marqué sur le Soleil, il faudrait que l'autre pût s'écouler au dehors, soit librement, soit emportée par des masses gazeuses qui s'éloigneraient de l'astre. Or M. Zenker démontre que l'une et l'autre de ces hypothèses sont inadmissibles.

D'ailleurs, avant d'admettre l'existence d'une force cosmique autre que la gravitation, il faut s'assurer que les forces déjà connues sont impuissantes à expliquer les phénomènes. Or il n'en est pas ainsi : il suffit d'attribuer aux comètes une constitution chimique convenable pour que les actions moléculaires provenant de la chaleur du Soleil produisent tous les effets d'une force répulsive. Admettons, par exemple, que la partie volatile de ces astres soit formée d'eau ou d'un carbure d'hydrogène liquide, tel que le pétrole, indépendamment des substances fixes qui pourraient leur être mêlées. Dans les régions glacées que parcourt la comète encore éloignée du Soleil, ces liquides, probablement solidifiés par le froid, forment un noyau compacte sans nébulosité. Mais, aux approches du périhélie, la chaleur solaire fait naître à la surface du noyau des vapeurs qui s'élancent en avant. Bientôt, refroidies par suite de leur dilatation et de leur rayonnement en tous sens, ces vapeurs se condensent de nouveau en particules liquides ou plutôt solides, et telle est l'origine de ces enveloppes concentriques, qui constituent la chevelure. Quant aux glaçons isolés qui viennent de se former, ils sont à leur tour exposés à l'action du Soleil. La face tournée du côté de l'astre se fond et se vaporise; les molécules gazeuses s'élancent dans l'espace avec une grande vitesse, et, par une conséquence forcée, il se produit un recul qui rejette en arrière la partie solide. C'est de ce recul que résultent, aux yeux de M. Zenker, tous les effets attribués jusqu'ici par les géomètres à une force répulsive réelle émanant du Soleil. Si l'on soumet cette hypothèse au calcul, on reconnaît qu'un glaçon dépourvu de toute rotation sur lui-même peut prendre un mouvement uniformément accéléré, qui le porte en quelques heures à d'immenses distances du noyau. Ainsi s'explique simplement la formation de ces queues prodigieuses qui, comme dans la comète de 1680, peuvent atteindre, en deux jours, une longueur de 80 millions de lieues. L'accélération de chaque glaçon dépend de ses dimensions et de sa distance au Soleil. Si, en outre, il tourne sur lui-même, il en résulte, dans la direction et

dans l'intensité de sa vitesse, des modifications qui amènent entre ses voisins et lui des croisements de route et peut-être des chocs. Par là s'expliquent toutes les irrégularités que nous présentent les comètes, la formation de queues multiples ou secondaires, leur disposition en éventail, les stries dont elles sont sillonnées, les différences dans la rapidité de leur développement, etc., etc. Quant à la courbure en arrière, elle est une conséquence très-simple de la loi de composition des mouvements simultanés.

M. Zenker cherche à établir que les phénomènes optiques constatés par l'observation viennent à l'appui de sa théorie. Les comètes nous envoient à la fois de la lumière réfléchie et de la lumière propre. La première est en partie polarisée, mais on ne sait dans quelle proportion, parce que la polarisation peut s'effectuer dans deux plans perpendiculaires l'un à l'autre. Quant à la lumière propre, il se peut qu'elle provienne de phénomènes électriques; mais M. Zenker l'attribue plutôt à l'échauffement produit dans les vapeurs répandues autour du noyau par l'absorption prolongée de ceux des rayons solaires qui correspondent au rhythme vibratoire de leurs molécules. C'est cette lumière propre qui donne le spectre discontinu des comètes, spectre dont les raies appartiennent surtout, comme on sait, à l'hydrogène et au carbone.

M. Zenker applique tout particulièrement sa théorie à la comète de Donati, moins remarquable peut-être par son éclat et sa grandeur que par la régularité de son développement, dont Bond a si minutieusement décrit et mesuré toutes les phases. Cette régularité s'explique, d'après l'auteur, par l'absence de tout mouvement de rotation ou d'oscillation dans le noyau. Moyennant une hypothèse appropriée sur le diamètre des glaçons et en tenant compte des données physiques relatives à la chaleur solaire, à l'absorption et à l'évaporation, on trouve un accord satisfaisant entre les résultats du calcul et ceux que l'observation a constatés, soit pour la longueur et la courbure de la queue, soit pour les distances mutuelles des enveloppes concentriques et pour les époques de leur formation.

Si l'on suppose le noyau animé d'un mouvement de rotation ou simplement de libration, il en résulte pour lui une position excentrique, et pour la chevelure un défaut de symétrie, qu'on a pu particulièrement remarquer dans les comètes II, 1861 et II, 1862.

Le noyau reformé par congélation peut prendre une forme irrégulière. Dès lors l'action du Soleil produit dans sa masse des fissures qui deviennent parfois assez profondes pour le diviser en plusieurs fragments, comme il est arrivé pour la comète de Biéla.

Si le noyau contient des gaz permanents, ils sont emportés avec les vapeurs, mais ne reviennent pas en arrière. Ainsi s'expliquent les queues dirigées vers le Soleil, comme celle de la comète 1823-24. Dans ce cas, ils échappent généralement à l'attraction du noyau. Il en est de même, au reste, des parties de la queue normale les plus éloignées de la tête, de sorte qu'à chacune de leurs révolutions les comètes perdent nécessairement une partie de leur substance.

Par suite de ces dernières considérations, l'auteur distingue trois classes de comètes :

Celles de la première classe ne contiennent que des gaz condensables, mêlés peut-être de particules non volatiles; leurs queues sont toujours opposées au Soleil.

Les comètes de la deuxième classe contiennent en même temps des gaz permanents; elles ont une seconde queue tournée vers le Soleil.

Enfin les comètes de la troisième classe ne contiennent que des gaz permanents: ce sont en quelque sorte des *poussières cométaires;* l'auteur pense que les essaims météoriques appartiennent plus particulièrement à cette classe.

Nous ne nous arrêterons pas aux objections que suscite cette théorie; nous nous bornerons à faire observer de nouveau qu'elle explique par des actions moléculaires connues cette mystérieuse force répulsive dont MM. Faye et Roche avaient déjà étudié les effets, sans se prononcer sur sa cause. En outre, M. Zenker serre de plus près qu'on ne l'avait fait jusqu'ici tous les phénomènes déjà constatés, et les indications tirées de sa théorie contribueront sans doute à diriger méthodiquement les observations futures.

Plummer (J.-J.). — *Observations équatoriales de petites planètes faites à l'Observatoire de Durham.* (Angl.)

Vogel (H.). — *Sur le spectre de la lumière zodiacale.*

Ce spectre a été observé le 6 mars 1872, dans des circonstances favorables. Il présentait une raie brillante qui coïncidait exactement avec la raie connue (5572) de l'aurore boréale. On voyait en

outre un faible spectre continu qui, du côté du rouge, s'arrêtait brusquement avant d'atteindre cette raie, et qui se fondait insensiblement du côté du bleu. Ajoutons que la raie dont nous venons de parler se montrait sur toutes les parties du ciel, mais moins intense que là où la lumière zodiacale était visible à l'œil nu.

Peters (C.-H.-F.). — *Opposition de Feronia.*

Michez. — *Lettre au rédacteur.* (Fr.)

L'auteur donne une éphéméride de la comète de Biela, à l'occasion de son prochain retour.

Wolf (R.). — *Lettre au Rédacteur.*

L'auteur donne un aperçu des matières contenues dans le n° 29 de ses *Communications astronomiques.*

Schmidt (J.-F.-J.). — *Observations d'étoiles variables à Athènes.*

Pechüle (C.-F.). — *Éléments et éphéméride de la planète* (120).

Watson (C.). — *Découverte d'une nouvelle planète* (121).

Luther (R.). — *Correction de l'éphéméride de Thétis.*

Bruhns (C.). — *Observations de la planète* (121).

Spörer. — *Observations de taches solaires et de protubérances.*

L'auteur tire de ses observations quelques conséquences générales. La production d'une protubérance *flamboyante* amène souvent dans son voisinage une diminution de pression d'où résultent de nouveaux groupes de taches, mais jamais sur tout son pourtour. Ces mêmes protubérances peuvent être regardées en partie comme des phénomènes électriques, en partie comme produites par la combustion de l'hydrogène que les couches supérieures de la photosphère ont pu dissoudre sous l'action d'une forte pression antérieure. Elles paraissent comme des facules sur le disque du Soleil, mais elles s'en distinguent par bien des particularités, par exemple par la latitude des régions qu'elles occupent.

Schulhof. — *Observations de planètes et de comètes à l'Observatoire de Vienne.*

Schmidt (J.-F.-J.). — *Observations d'étoiles variables.*

Schönfeld (E.). — *Éphémérides des étoiles variables suivantes : Algol, λ du Taureau,* S *du Cancer,* δ *de la Balance.*

Wijkander (E.). — *Éléments corrigés et éphéméride pour l'opposition* 1872-1873, *de Lomia* (117).

Sands (B.-F.). — *Observations de la planète* (121). (Angl.)

Talmage (G.-C.). — *Lettre au rédacteur.* (Angl.)

L'auteur rappelle que le compagnon de Procyon a été découvert par Barklay, à l'Observatoire de Leyton, en 1856, et non en 1863 comme le dit M. Dembowski.

Oudemans. — *Observation de l'éclipse totale du* 12 *décembre* 1871, *à Java.* (Hollandais.)

La couronne était visible à l'œil nu; sa lumière était polarisée dans un plan passant par le centre du Soleil. L'ensemble des observations est du reste conforme à ce que l'on sait déjà sur ce phénomène.

Schubert (E.). — *Éléments de Fides, ses perturbations par l'action de Jupiter.* — *Tables pour la solution du problème de Kepler.* (Angl.)

Khandrikof (Pr.-M.). — *Observations de la comète d'Encke.*

L'auteur donne en outre les coordonnées géographiques suivantes pour l'Observatoire de Kief :

Latitude....................	$50^{\circ}27'10'',26$
Longitude à l'est de Poulkova..	$0^{h}0^{m}42^{s},44$

Schmidt (J.-F.-J.). — *Observations d'étoiles variables.*

Doberck (W.). — *Nouveaux éléments paraboliques de la comète de Tempel* (II, 1869).

G. L.

ABHANDLUNGEN DER KÖNIGL. BÖHMISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN. Prag. — In-4° (¹).

6e Série, t. VI; 1874.

KÜPPER (K.). — *Des polygones de Steiner sur une courbe du troisième ordre* C^3, *et théorèmes de la Géométrie de situation qui en dépendent.* (39 p.)

Ce beau et riche Mémoire se divise en deux Parties. Dans la première, par la considération de systèmes de points particuliers sur une courbe plane du troisième ordre, l'auteur établit d'abord, d'une manière élégante, les théorèmes connus de Steiner, d'où il déduit ensuite un grand nombre de résultats nouveaux; puis, en appliquant la loi de réciprocité, il donne comme exemple la cycloïde à trois rebroussements.

La seconde Partie traite des courbes non planes du quatrième ordre et de première espèce, et d'une courbe plane spéciale du quatrième ordre C_4^1. Les courbes non planes du quatrième ordre sont étudiées comme intersection partielle de deux cônes du troisième degré, qui ont en commun une courbe plane du troisième ordre et une génératrice avec son plan tangent. On a comme lignes doubles des surfaces des tangentes de ces courbes non planes, des courbes planes du quatrième ordre à trois points doubles, qui sont discutées dans le dernier paragraphe du Mémoire.

WEYR (Em.). — *La lemniscate traitée comme courbe rationnelle.* (40 p.)

L'auteur, au moyen de l'introduction d'un paramètre entrant rationnellement dans les expressions des coordonnées d'un point de la lemniscate, démontre diverses propositions nouvelles sur cette courbe. Les plus remarquables ont été communiquées à la Société Mathématique de France dans une courte Note, intitulée : « Quelques théorèmes nouveaux sur la lemniscate (²). »

WEYR (Ed.). — *Sur les courbes algébriques dans l'espace. Dissertation inaugurale.* (27 p.)

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 105.

(²) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. I. — Voir *Bulletin*, t. VI, p. 164.

L'auteur établit ce théorème : « Si l'on peut, sur une courbe algébrique particulière C, désigner des groupes, de λ points chacun, comme points mobiles d'intersection de cette courbe avec des surfaces du $m^{\text{ième}}$ ordre, de telle manière que *l'un* des groupes puisse être choisi tout à fait arbitrairement, λ est plus grand que le genre de la courbe, » lequel peut être déterminé à l'aide du théorème d'Abel. En s'appuyant sur cette proposition, il poursuit l'étude des courbes dans l'espace, en traitant celles des six premiers ordres.

E. W.

MÉLANGES.

CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ENTRE LEGENDRE ET JACOBI (¹).

(Suite.)

Jacobi à Legendre.

Königsberg, le 12 janvier 1828.

Monsieur,

Je chercherais en vain à vous décrire quels furent mes sentiments en recevant votre Lettre du 30 novembre et en même temps le numéro du *Globe*, qui contient la Communication que vous avez bien voulu faire à l'Académie des Sciences de mes essais. Je me sentis confus, accablé de cet excès des bontés que vous m'avez eues, et du sentiment que jamais de vie je n'en saurai mériter de pareilles. Comment vous rendre grâce? Quelle satisfaction pour moi que l'homme que j'admirais, tout en dévorant ses écrits, a bien voulu accueillir mes travaux avec une bonté si rare et si précieuse! Tout en manquant de paroles qui soient de dignes interprètes de mes sentiments, je n'y saurai répondre qu'en redoublant mes efforts à pousser plus loin les belles théories dont vous êtes le créateur.

(¹) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 287.

J'avais déjà appris, il y a quelques mois, que vous avez publié un nouvel Ouvrage sur les *Fonctions elliptiques,* en deux volumes. Aussitôt j'ai donné à un libraire de Berlin l'ordre de me le faire parvenir; mais, à mon grand dépit, je ne l'ai pas encore reçu. J'attends donc avec une impatience extrême le cadeau brillant que vous m'en avez voulu faire, et pour lequel je vous rends mille grâces.

Depuis ma dernière Lettre, des recherches de la plus grande importance ont été publiées sur les *Fonctions elliptiques,* de la part d'un jeune géomètre, qui peut-être vous sera connu personnellement. C'est la première partie d'un Mémoire de M. Abel, à Christiania, qu'on m'a dit avoir été à Paris il y a deux ou trois ans, inséré dans le second cahier du second volume du *Journal des Mathématiques pures et appliquées,* publié à Berlin par M. Crelle. La continuation doit avoir été publiée dans ces jours dans le cahier troisième dudit Journal; mais elle ne m'est parvenue pas encore. Comme je suppose que ce Mémoire ne vous soit pas encore connu, je vous en veux raconter les détails les plus intéressants. Mais, pour plus de commodité, j'avancerai le mode de notation dont je me sers ordinairement.

Si l'on pose $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+x^2\sin^2\varphi}} = \Xi$, l'angle φ étant l'amplitude de Ξ, je le désigne par $\operatorname{am}\Xi$; K étant la fonction entière $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}$, je mets, au lieu de $\operatorname{am}(K-\Xi)$, cette autre expression $\operatorname{coam}\Xi$ (c'est-à-dire *complementi amplitudo*). Je désigne, avec vous,

$$\sqrt{1-x^2\sin^2(\operatorname{am}\Xi)} = \frac{d\operatorname{am}\Xi}{d\Xi} \quad \text{par} \quad \Delta\operatorname{am}\Xi.$$

Le module sera mis à côté, si on le juge convenable; toutes les fois qu'il sera supprimé dans le suivant, les formules se rapportent au module x. Du reste, je désignerai le complément de x par x' et la fonction entière qui répond à x' par K'.

M. Abel commence par donner l'expression analytique de toutes les racines des équations élevées desquelles dépend la division des fonctions elliptiques. En effet, soit $\sin\varphi = i\tang\psi$, i étant $\sqrt{-1}$,

on aura

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\varphi}} = \frac{i\,d\psi}{\sqrt{1 - x'^2 \sin^2\psi'}},$$

d'où l'on tire

$$\sin \operatorname{am}(i\Xi, x) = i \operatorname{tang} \operatorname{am}(\Xi, x'),$$

théorème fondamental de M. Abel.

Je remarque encore les formules suivantes :

$$\cos \operatorname{am}(i\Xi, x) = \operatorname{séc} \operatorname{am}(\Xi, x'),$$

$$\Delta \operatorname{am}(i\Xi, x) = \frac{\Delta \operatorname{am}(\Xi, x')}{\cos \operatorname{am}(\Xi, x')} = \operatorname{coséc} \operatorname{coam}(\Xi, x').$$

Aussi on aura

$$\sin \operatorname{am}(2iK', x) = 0,$$

$$\sin \operatorname{am}(\Xi + iK') = \frac{1}{x \sin \operatorname{am}\Xi},$$

$$\cot \operatorname{am}(\Xi + iK') = -i\Delta \operatorname{am}\Xi,$$

$$\Delta \operatorname{am}(\Xi + iK') = -i \cot \operatorname{am}\Xi, \ldots.$$

Comme on a

$$\operatorname{tang} \operatorname{am}(2m'K', x') = 0,$$

m' étant un nombre entier, on aura aussi

$$\sin(2m'iK', x) = 0,$$

d'où suit qu'on aura en général

$$\sin \operatorname{am}(\Xi + 4mK + 4m'iK') = \sin \operatorname{am}\Xi,$$

m et m' étant des nombres positifs ou négatifs. On voit donc que les racines de l'équation élevée qui sert à la division de la fonction elliptique Ξ en n parties seront de la forme

$$\sin \operatorname{am} \frac{\Xi + 4m'\,K + 4m'\,iK}{n},$$

formule qui embrasse toutes les racines au nombre de n^2, si l'on donne à m, m' successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

M. Abel ramène ensuite la division d'une fonction elliptique

quelconque Ξ à la division de la fonction entière K. En effet, soient α, β des racines quelconques de l'équation $x^n = 1$, l'expression

$$\left(\Sigma \alpha^m \beta^{m'} \sin \operatorname{am} \frac{\Xi + 4mK + 4m'K'}{n}\right)^n \quad ([1]),$$

où l'on donne à m, m' toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, ne changera pas si l'on met, au lieu de $\sin \operatorname{am} \frac{\Xi}{n}$, une autre racine quelconque $\sin \operatorname{am} \frac{\Xi + 4\mu K + 4\mu' i K'}{n}$. Cette expression sera donc symétrique par rapport à ces racines et pourra, par conséquence, être exprimée par

$$\sin \operatorname{am} \Xi \quad ([2]).$$

A présent, si l'on donne à α, β toutes leurs valeurs possibles, ce qui donne n^2 combinaisons, on tire de là les valeurs de toutes les racines. M. Abel suit une autre méthode, qui, si je ne me trompe pas, rend le problème plus compliqué qu'il n'est en lui-même.

La division de la fonction entière, laquelle dépend en général d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, est ramenée à une équation du degré $n+1$, n étant un nombre premier. En effet, soient

$$\frac{4\mu K + 4\mu' K'}{n} = \omega,$$

g une racine primitive de la congruence $x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, $\varphi(\omega)$ une fonction trigonométrique quelconque de l'amplitude ω, α une racine de l'équation $x^{n-1} = 1$; on y parvient en considérant l'expression

$$[\varphi(\omega) + \alpha\varphi(g\omega) + \alpha^2\varphi(g^2\omega) + \ldots + \alpha^{n-3}\varphi(g^{n-2}\omega)]^{n-1},$$

symétrique en $\varphi(\omega)$, $\varphi(g\omega)$, $\varphi(g^2\omega), \ldots$, $\varphi(g^{n-2}\omega)$. Or les fonctions symétriques de ces quantités ne sauront avoir que

---

([1]) On entend par Σ la somme des expressions formées de ladite manière.

([2]) Il faut ajouter : Et par des quantités constantes, mais irrationnelles, de la forme $\sin \operatorname{am} \frac{4mK + 4m'iK'}{n}$.

des valeurs différentes au nombre $n+1$, qui répondent à $\mu = 0$, $\mu' = 1$, $\mu = 1$; $\mu' = 0$, $\mu' = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Donc elles seront données au moyen d'une équation algébrique du degré $n+1$. Je vais ajouter à présent les propres paroles de M. Abel, en remarquant qu'il considère dans son Mémoire les fonctions elliptiques sous la forme $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$.

« Donc, en dernier lieu, la résolution de l'équation $P_n = 0$ est réduite à celle d'une seule équation de degré $n+1$; mais cette équation ne paraît pas en général être résoluble algébriquement. Néanmoins, on peut la résoudre complétement dans plusieurs cas particuliers, par exemple lorsque $e = c$, $e = c\sqrt{3}$, $e = c(2 \pm \sqrt{3})$, etc. Dans le cours de ce Mémoire [1], je m'occuperai de ces cas, dont le premier est surtout remarquable, tant par la simplicité de la solution que par sa belle application dans la Géométrie. En effet, entre autres, je suis parvenu à ce théorème : *On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate, par la règle et le compas seuls, en m parties égales, si m est de la forme* 2^n *ou* $2^n + 1$, *le dernier nombre étant en même temps premier; ou bien si m est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes.* Ce théorème est, comme on voit, précisément le même que celui de M. Gauss, relativement au cercle. »

Connaissant les racines des équations mentionnées, M. Abel les résout en facteurs; ensuite, dans les formules qui en résultent, il pose $n = \infty$, d'où il tire des expressions très-remarquables; mais cela n'a plus aucune difficulté.

Vous m'avez permis, Monsieur, de vous communiquer l'analyse dont je me sers. Une démonstration rigoureuse du théorème général concernant les transformations s'imprime à présent dans le Journal de M. Schumacher; elle vous sera envoyée aussitôt qu'elle sera imprimée. Mes recherches ultérieures sont encore loin d'être finies; cependant j'en embrasserai une partie dans un Mémoire que je crois pouvoir publier sous peu. Il s'y trouvera, entre autres, un résultat curieux qui m'a d'abord frappé un peu; c'est le cas suivant: Si l'on peut transformer un module $\varkappa$ dans un autre λ, on a entre

(1) Qui n'est pas encore publié.

ces deux modules une équation algébrique du degré $n+1$, si la transformation se rapporte au nombre n, qu'on suppose être premier. Ces équations symétriques en $\varkappa$ et λ sont, par exemple, pour $n=3$, $n=5$,

$$u^4 - v^4 \pm 2uv(1 - u^2v^2) = 0,$$
$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) \pm 4uv(1 - u^4v^4) = 0,$$

où l'on a supposé $u = \sqrt[4]{\varkappa}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$. Il paraît remarquable que ces équations, qu'on pourrait appeler *équations modulaires*, ont leur forme la plus simple entre les quatrièmes racines des modules. Or toutes ces équations algébriques en nombre infini satisfont à une même équation différentielle du troisième degré, savoir :

$$3(d\varkappa^2 d^2\lambda^2 - d\lambda^2 d^2\varkappa^2) - 2\,d\varkappa\, d\lambda(d\varkappa\, d^3\lambda - d\lambda\, d^3\varkappa)$$
$$+ d\varkappa^2 d\lambda^2 \left[\left(\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa - \varkappa^3}\right)^2 d\varkappa^2 - \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda - \lambda^3}\right)^2 d\lambda^2\right] = 0,$$

où l'on n'a supposé constante aucune différentielle. Aussi j'ai trouvé que, dans certains cas, on retombe sur le même module, de sorte que la transformation devient multiplication; ainsi $\varkappa$, étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on aura deux racines de l'équation

$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) - 4uv(1 - u^4v^4) = 0,$$

égales à $(1 \pm i)u^5$, d'où l'on tire $v^8 = \lambda^2 = \varkappa^2 = \frac{1}{2}$. Ce sera, dans les cas où le nombre n est la somme de deux carrés, $n = a^2 + 4b^2$, $\varkappa$ étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$; la fonction elliptique se trouve alors multipliée par $a \pm 2bi$. On remarque des choses semblables dans les modules qui sont liés d'après une échelle quelconque avec $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$. C'est un genre de multiplication qui n'a pas son analogie dans les arcs de cercle. Je suis très-curieux de savoir votre avis sur ma démonstration, laquelle à la vérité est un peu compliquée. La nouvelle d'une troisième édition de la *Théorie des nombres* m'a charmé. Je n'ai travaillé sur cette science que très-peu de temps; quand je m'aurai pris la liberté de vous communiquer un petit Mémoire qui va être

publié sur la *Théorie des résidus,* vous verrez que mes idées ne méritent pas la place brillante que vous leur avez offerte. Aussi les recherches sur les fonctions elliptiques doivent être en quelque sorte finies avant qu'elles soient dignes de former un Supplément à un Ouvrage sans doute parfait dans toutes ses parties.

Adieu, Monsieur, daignez recevoir les respects les plus profonds que m'inspirent la supériorité de vos lumières et la générosité de vos sentiments. Jamais de ma vie je n'oublierai cette bonté de père avec laquelle vous avez voulu m'encourager dans la carrière des sciences.

Votre dévoué serviteur,

C.-G.-J. Jacobi.

P.-S. Le troisième cahier du *Journal de Crelle,* que je viens de recevoir, ne contient pas encore la suite du Mémoire de M. Abel.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 9 février 1828.

Monsieur,

Lorsque j'ai reçu votre lettre du 12 janvier, M. Schumacher m'avait déjà envoyé le n° 127 de son Journal, où se trouve votre démonstration du théorème sur les transformations des fonctions elliptiques. J'ai pris infiniment de plaisir à votre démonstration, où brille votre sagacité et que je trouve fort courte relativement à la grande étendue de son objet; elle m'a suggéré quelques remarques dont j'ai envoyé un précis à M. Schumacher, pour être imprimé dans son Journal, suivant le désir qu'il m'en avait témoigné. La manière dont vous passez de la valeur de $1-y$ à celle de y, décomposée également en facteurs, m'a paru très-élégante; mais ce qui, à mes yeux, fait le grand mérite de votre démonstration, c'est l'heureuse idée que vous avez eue de substituer à la fois $\frac{1}{\varkappa x}$ à x et $\frac{1}{\lambda y}$ à y. Cette double substitution, qui satisfait à l'équation différentielle, doit satisfaire aussi aux intégrales qui la représentent; par ce

moyen, vous pouvez vérifier d'un trait de plume la valeur $y = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}$, et vous trouvez pour seule condition la valeur du module λ exprimée en fonction du module donné $\varkappa$; dès lors le théorème est démontré dans toute sa généralité, sans aucun calcul pénible et par une sorte d'enchantement; vous verrez dans ma Note que cette belle démonstration m'aurait paru plus satisfaisante si vous y eussiez joint quelques détails sur la série des idées qui vous ont conduit à la valeur supposée pour $1 - y$; vous pourrez avoir égard à mon observation dans les autres parties de vos recherches qui vous restent à publier. J'ai indiqué aussi une vérification de votre théorème qu'il serait curieux d'effectuer, et qui mettrait dès à présent cette découverte dans tout son jour. Par vos formules, il est facile de trouver la valeur de la fonction T en facteurs; ensuite l'idée vient naturellement de faire les substitutions dans l'équation

$$\frac{d\mathrm{U}}{\mathrm{U}\,dx} - \frac{d\mathrm{V}}{\mathrm{V}\,dx} = \frac{1}{\mathrm{M}}\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{UV}},$$

afin de voir si elle est satisfaite. L'équation mise sous cette forme se décompose dans les deux membres en fractions partielles dont les dénominateurs sont les facteurs binômes des fractions U et V, et il est facile d'avoir l'expression générale du numérateur correspondant à un facteur quelconque de U, et celle du numérateur correspondant à un facteur quelconque de V.

L'identité de l'équation fournira donc deux conditions générales qui devront être satisfaites. Depuis l'envoi de ma Note, j'ai observé que ces deux conditions se réduisent à une seule, que je présente ici sous la forme la plus simple. Soit α_m l'amplitude telle que $\mathrm{F}(\alpha_m) = \frac{m}{2n+1}\mathrm{K}$; la condition dont il s'agit, et qui doit avoir lieu pour toute valeur de i depuis 1 jusqu'à n, est celle-ci :

$$\begin{aligned}
&2\cos\alpha_{2i}\left(\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_2}-1\right)\left(\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_4}-1\right)\cdots\left(\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_{2i-2}}-1\right)\\
&\qquad\times\left(1-\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_{2i+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_m}\right)\\
&\quad=(1-\varkappa^2\sin^2\alpha_{2i}\sin^2\alpha_1)(1-\varkappa^2\sin^2\alpha_{2i}\sin^2\alpha_3)\\
&\qquad\times(1-\varkappa^2\sin^2\alpha_{2i}\sin^2\alpha_5)\ldots(1-\varkappa^2\sin^2\alpha_{2i}\sin^2\alpha_{2n-1}).
\end{aligned}$$

Cette équation doit être vraie d'après votre démonstration, mais il serait intéressant de la déduire des premiers principes de la théorie des fonctions elliptiques. C'est une recherche que je laisse à votre sagacité et qui me paraît assez importante, puisqu'elle confirmera d'une manière invincible l'exactitude de votre théorème. Je suis parvenu à cette équation au moyen d'un lemme que j'ai déduit de vos formules et qui, dans votre notation, serait exprimé ainsi :

$$\frac{1-\dfrac{x^2}{\sin^2\left(\operatorname{coam}\dfrac{2mK}{2n+1}\right)}}{1-\varkappa^2x^2\sin^2\left(\operatorname{am}\dfrac{2mK}{2n+1}\right)}=\frac{\operatorname{cosam}\left(\Xi+\dfrac{2mK}{2n+1}\right)\operatorname{cosam}\left(\Xi-\dfrac{2mK}{2n+1}\right)}{\cos\left(\operatorname{am}\dfrac{2mK}{2n+1}\right)}.$$

Je crois voir, en écrivant ceci, que ce même lemme donnera assez facilement la démonstration de mon équation.

J'avais déjà connaissance du beau travail de M. Abel inséré dans le *Journal de Crelle;* mais vous m'avez fait beaucoup de plaisir de m'en donner une analyse dans votre langage qui est plus rapproché du mien. C'est une grande satisfaction pour moi de voir deux jeunes géomètres, comme vous et lui, cultiver avec succès une branche d'Analyse qui a fait si longtemps l'objet de mes études favorites et qui n'a point été accueillie dans mon propre pays comme elle le méritait. Vous vous placez par ces travaux au rang des meilleurs analystes de notre époque; nous voyons au contraire ici les talents peu nombreux qui y restent se livrer à des recherches vagues qui ne laisseront que de faibles traces dans l'histoire. Ce n'est pas assez d'avoir du talent, il faut savoir choisir l'objet dont on doit s'occuper.

J'attends avec impatience la suite des recherches que vous ferez paraître dans le Journal de M. Schumacher, et particulièrement les relations que vous avez trouvées entre deux modules qui peuvent se transformer l'un dans l'autre. Vous me donnez, pour le cas $n=3$, l'équation

$$u^4-v^4\pm 2uv(1-u^2v^2)=0,$$

à laquelle j'ai ajouté le double signe $\pm$; j'ai, pour le même cas, donné dans mon *Traité* l'équation $1=\sqrt{cc_1}+\sqrt{bb_1}$ qui revient au même; mais vous êtes allé beaucoup plus loin.

Je ne m'occupe pas encore de ma troisième édition de la *Théorie des nombres;* ainsi vous avez tout le temps de me faire part de ce que vous aurez imprimé sur les résidus de différents degrés. J'ai déjà approuvé beaucoup votre démonstration de la loi de réciprocité, à laquelle pourtant il faut ajouter quelques développements; je pourrais vous indiquer dans cette partie des objets de recherche qui ont une difficulté digne de vous; mais j'aime mieux vous donner le conseil de ne pas donner trop de temps aux recherches de cette nature. Elles sont très-difficiles et ne mènent souvent à aucun résultat.

Je suis étonné de ce que vous n'avez pas encore reçu l'exemplaire que M. l'ambassadeur, le baron de Werther, avait promis de vous faire passer. Il faut le réclamer à Berlin, si vous éprouvez de nouveaux retards.

Agréez, Monsieur, l'assurance de mon estime bien sincère et de mon entier dévouement.

LEGENDRE.

Je vous prie de ne pas prendre la peine d'affranchir, quand vous m'écrivez : il ne faut pas que ma correspondance vous soit onéreuse.

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Алексѣевъ (Н.). — Интегральное исчисленіе. Книга I. Изданіе второе. — Москва, въ Университетской типографіи (Катковъ и К°), 1874. — 1 vol. grand in-8°, VIII-368 p. 3 roubles.

Деларю (А.-М.). — Лекціи исчисленія безконечно-малыхъ. — 1875 г. Харьковъ. — Grand in-4°, lithographié, 176 p.

MARCO (F.), professeur de Physique au Lycée de Turin. — L'unité dynamique des forces et des phénomènes de la nature, ou l'atome tourbillon. — Paris, Gauthier-Villars, 1875. In-12, 192 p. 2 fr. 50 c.

MUGNIER, chef d'escadron d'artillerie. — Projet de canon de cam-

pagne. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-8°, 210 p., 5 pl. 4 fr.

Ruchonnet (Ch.). — Éléments de Calcul approximatif. 2e édition. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-8°, 65 p. 1 fr.

Saltel (L.). — Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique. — Bruxelles, Hayez, 1875. In-8°, 33 p. 1 fr. 50 c.

Sparre (comte M. de), lieutenant d'artillerie. — Mouvement des projectiles oblongs dans le cas du tir de plein fouet. — Paris, Gauthier-Villars, 1875. Grand in-8°, 88 p., 3 pl. 3 fr.

Wargnies-Hulot. — Comptabilité simplifiée, à l'usage du commerce, de l'industrie et de la banque. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-8°, 71 p. 1 fr. 75 c.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGL. BÖMISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN PRAG [1].

Année 1874.

STUDNIČKA (Fr.). — *Sur l'expression immédiate de la $n^{ième}$ dérivée des fonctions fractionnaires d'une variable.* (1 p.)

La $n^{ième}$ dérivée d'une fonction fractionnaire χ est développée sous la forme

$$\chi^{(n)} = \frac{\Delta_n}{\varphi_n},$$

comme résultat de l'élimination entre un système d'équations linéaires.

ZAHRADNÍK (K.). — *Des systèmes harmoniques de points sur les courbes rationnelles du troisième et du quatrième ordre.* (4 p.)

L'auteur prouve, entre autres, que le lieu des points d'où l'on peut mener à une courbe du troisième ordre et de la quatrième classe quatre tangentes dont les points de contact forment un système harmonique est une autre courbe du troisième ordre. On trouve un résultat analogue pour les courbes du quatrième ordre et de la troisième classe.

STUDNIČKA (Fr.). — *Contribution à l'hyétographie de la Bohême.* (11 p.)

WALTENHOFEN (A. v.).— *Sur les lois de l'incandescence des fils produite par les courants électriques.* (5 p.)

Les lois de ce phénomène sont développées d'une manière simple et claire, en partant de l'équation de Müller

$$\gamma = \frac{s}{d},$$

s étant l'intensité du courant, d l'épaisseur du fil, et γ la mesure de l'incandescence.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 229.

Zenger. — *Sur un nouveau microscope universel.* (15 p.)

L'appareil décrit peut servir à la fois de micromètre, de sphéromètre, de goniomètre à fils, de goniomètre de polarisation, de polarimètre, d'astromètre, etc.

Zenger. — *Sur un nouveau procédé photographique pour obtenir une épreuve photographique exacte avec un grossissement quelconque.* (17 p.)

L'auteur expose les avantages du procédé indiqué, en particulier pour les observations du passage de Vénus en 1874.

Weyr (Em.). — *Sur les courbes du quatrième ordre.* (2 p.)

L'auteur développe les équations auxquelles doivent satisfaire les paramètres de quatre points d'une courbe rationnelle non plane du quatrième ordre, dans le cas général, ainsi que dans le cas d'un point double et dans celui d'un point de rebroussement, pour que les quatre points soient dans un même plan. Il termine en traitant aussi de la condition pour que quatre points d'une courbe rationnelle plane soient en ligne droite.

Zahradník (K.). — *Théorie de la cardioïde.* (8 p.)

La courbe est traitée comme une courbe de troisième classe et de quatrième ordre, et par suite comme une courbe rationnelle, dépendant d'un paramètre rationnel, lequel, après le développement de divers théorèmes de la Géométrie de situation, est employé aussi pour la quadrature et la rectification de la courbe.

Blažek (G.). — *Sur les éléments d'une théorie mécanique des courants marins.* (10 p.)

L'auteur parvient, par des considérations théoriques, aux résultats suivants, qui concordent avec les observations :

« La cause première des courants marins est l'inégalité de température de l'eau, de l'équateur aux pôles.

» Cette inégalité est due à l'action de la force centrifuge, qui pousse l'eau froide vers l'équateur, l'eau chaude vers les pôles. Ce mouvement est favorisé par le courant produit déjà dans le même sens par la pesanteur, par suite de l'inégale densité.

» A cause de la rotation de la Terre, ces courants en latitude sont déviés : celui du pôle vers l'ouest, celui de l'équateur vers l'est. La déviation, pour une même latitude, peut être regardée comme proportionnelle à la vitesse.

» En vertu de la rotation de la Terre et de l'inertie de l'eau, il se produit de part et d'autre de l'équateur des courants fermés, en sens contraire de la rotation de la Terre, et dont les centres sont situés entre 30 et 35 degrés de latitude. Sous ces cercles se produisent, au fond de la mer, des courants froids de sens opposés, qui s'élèvent à la surface vers l'équateur, et donnent lieu au courant équatorial.

Studnička (Fr.). — *Bulletin ombrométrique pour novembre, décembre, et pour l'année entière* 1874. (6 p.) E. W.

MELANGES.

CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ENTRE LEGENDRE ET JACOBI [1].

(Suite.)

Jacobi à Legendre.

Königsberg, le 12 avril 1828.

Monsieur,

Il me faut vous faire de grandes excuses d'avoir retardé aussi longtemps la réponse à votre aimable lettre, pleine de vos bontés, qui font la plus douce récompense de mes efforts et un grand bonheur de ma vie. En effet, j'avais espéré de jour en jour pouvoir vous mander la fin d'un premier Mémoire, qui devait embrasser la plupart de mes recherches. Cependant la difficulté de la matière, de même que les nouvelles vues qui se sont ouvertes dans le cours même du travail, me font éprouver de si grands retards, que peut-être il ne vous sera pas désagréable si je vous fais part des résultats principaux trouvés jusqu'ici, et qui me paraissent dignes de votre intérêt. Veuillez les accueillir avec la bonté dont vous m'avez

(1) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 38.

donné des preuves si éclatantes et qui seront gravées à jamais dans mon cœur.

Soit, d'après ma notation, $\omega = \frac{m\mathrm{K} + 2m'i\mathrm{K}'}{n}$ (n est un nombre impair), m et m' désignant des nombres entiers quelconques, mais tels qu'un même nombre ne saura être diviseur des trois, m', m, n. Vous verrez aisément que la démonstration de mon théorème s'applique mot à mot au cas même qu'on met partout $\operatorname{am}\omega$ au lieu de $\operatorname{am}\frac{\mathrm{K}}{n}$. En mettant successivement

$$\omega = \frac{\mathrm{K}}{n},\quad \frac{2i\mathrm{K}'}{n},\quad \frac{\mathrm{K}\pm 2i\mathrm{K}'}{n},\quad \frac{\mathrm{K}\pm 4i\mathrm{K}'}{n},\ldots,\quad \frac{\mathrm{K}\pm(n-1)i\mathrm{K}'}{n},$$

on tire de là un nombre $n+1$ de transformations attachées au nombre n, et analogues à celle que j'ai donnée relativement à $\omega = \frac{\mathrm{K}}{n}$. Elles embrassent toutes les possibles quand n est premier; aussi, dans le cas de $n = 3$, $n = 5$, j'ai montré que les équations modulaires montent au quatrième et sixième degré, comme cela doit être. De ces modules, au nombre de $n+1$, il n'y a que deux qui soient réels, savoir : ceux qui répondent à $\omega = \frac{\mathrm{K}}{n}$ et à $\omega = \frac{2i\mathrm{K}'}{n}$. La dernière transformation, savoir, celle qui répond à $\omega = \frac{2i\mathrm{K}'}{n}$, est précisément la même qui fournit le théorème complémentaire. Pour démontrer ceci, il faut remonter aux formules analytiques concernant la multiplication, données la première fois par M. Abel. J'en cite les trois suivantes, présentées d'après la forme sous laquelle vous considérez les fonctions elliptiques, et dans laquelle j'ai eu soin de vous suivre :

$$\begin{cases} (1)\quad \sin\operatorname{am}(n\xi,\varkappa) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\varkappa^{\frac{n^2-1}{2}}\,\Pi\sin\operatorname{am}\left(\xi + \dfrac{2m\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}'}{n}\right), \\[2ex] (2)\quad \dfrac{1}{\varkappa'^{n^2-1}} = \Pi\sin^4\operatorname{coam}\dfrac{2m\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}'}{n}, \\[2ex] (3)\quad \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} = \Pi\,\dfrac{\sin^2\operatorname{coam}\dfrac{2m\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}'}{n}}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{2m\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}'}{n}}. \end{cases}$$

Les produits désignés par Π embrassent tous les facteurs *différents entre eux* que l'on obtient en donnant à m, m' des valeurs en nombres entiers positifs ou négatifs.

Les trois formules principales relatives à la transformation complémentaire sont

$$\begin{aligned}
&\sin\mathrm{am}(n\xi, \varkappa)\\
&= \sqrt{\frac{\lambda^n}{\varkappa}}\sin\mathrm{am}\frac{\xi}{M}\sin\mathrm{am}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{4i\Lambda'}{n}\right)\sin\mathrm{am}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{8i\Lambda'}{n}\right)\cdots\sin\mathrm{am}\left[\frac{\xi}{M}+\frac{4(n-1)i\Lambda'}{n}\right]\ (\mathrm{mod.}\,\lambda')\\
&= \frac{nMy\left(1+\dfrac{y^2}{\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{2\Lambda'}{n}}\right)\left(1+\dfrac{y^2}{\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{4\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left[1+\dfrac{y^2}{\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right]}{\left(1+\lambda^2\,\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{2\Lambda'}{n}y^2\right)\left(1+\lambda^2\,\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{4\Lambda'}{n}y^2\right)\cdots\left[1+\lambda^2\,\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}y^2\right]}\ (\mathrm{mod.}\,\lambda'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varkappa &= \lambda^n\left[\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{2i\Lambda'}{n}\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{4i\Lambda'}{n}\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{6i\Lambda'}{n}\cdots\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}\right]^4\ (\mathrm{mod.}\,\lambda)\\
&= \frac{\lambda^n}{\left[\Delta\mathrm{am}\frac{2\Lambda'}{n}\Delta\mathrm{am}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\Delta\mathrm{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}\right]^4}\ (\mathrm{mod.}\,\lambda'),
\end{aligned}$$

$$(3)\quad \frac{1}{nM} = \left[\frac{\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{2\Lambda'}{n}\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}{\sin\mathrm{am}\,\frac{2\Lambda'}{n}\sin\mathrm{am}\,\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\sin\mathrm{am}\,\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right]^2\ (\mathrm{mod.}\,\lambda'),$$

où l'on a mis

$$y = \sin\mathrm{am}\left(\frac{\xi}{M}, \lambda\right), \qquad \Lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}},$$

$$\Lambda' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda'^2\sin^2\varphi}}, \quad \lambda^2+\lambda'^2 = 1.$$

Il faut ajouter que la théorie de la première transformation donne $\Lambda = \dfrac{K}{nM}$, $\Lambda' = \dfrac{K'}{M}$. Démontrons la première de ces formules.

Si, dans la formule suivante, qui concerne la première transformation,

$$\begin{aligned}
&\sin\mathrm{am}\left(\frac{\xi}{M}, \lambda\right)\\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{\varkappa^n}{\lambda}}\sin\mathrm{am}\,\xi\,\sin\mathrm{am}\left(\xi+\frac{4K}{n}\right)\sin\mathrm{am}\left(\xi+\frac{8K}{n}\right)\cdots\sin\mathrm{am}\left[\xi+\frac{4(n-1)K}{n}\right],
\end{aligned}$$

on met $\xi + \frac{2m'iK'}{n}$ au lieu de ξ, $\frac{\xi}{M}$ devenant

$$\frac{\xi}{M} + \frac{2m'iK'}{nM} = \frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n},$$

on a

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sinam}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}, \lambda\right) \\ = \sqrt{\frac{\varkappa^n}{\lambda}} \Pi \operatorname{sinam}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right),\end{aligned}$$

où l'on donne à m les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \frac{n-1}{n}$.
Dans cette formule, mettant successivement $m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ $\pm \frac{n-1}{n}$, et formant le produit, on a

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \Pi \operatorname{sinam}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}, \lambda\right) \\ = \sqrt{\frac{\varkappa^{n^2}}{\lambda^n}} \Pi \operatorname{sinam}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right).\end{aligned}$$

Mais la formule désignée par ♀ (1) donne

$$\operatorname{sinam} n\xi = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varkappa^{\frac{n^2-1}{2}} \Pi \operatorname{sinam}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right),$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{sinam}(n\xi, \varkappa) = \sqrt{\frac{\lambda^n}{\varkappa}} \Pi \operatorname{sinam}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}, \lambda\right),$$

ce qui est la formule à démontrer. De la même manière, on démontre les deux autres au moyen des formules ♀ (2), (3). La formule dont j'ai fait mention dans ma première Lettre résulte des mêmes principes.

Si l'on met dans ces deux transformations $i\xi$ au lieu de ξ, on a la transformation du module $\varkappa'$ dans le module λ', et *vice versa*. Nommant λ_1 le second module réel dans lequel on sait transformer le module $\varkappa$ et qui répond à $\omega = \frac{2iK'}{n}$, on verra que λ dépend de la même manière de $\varkappa$ que $\varkappa$ de λ_1, λ_1 de $\varkappa'$ et $\varkappa'$ de λ', λ' étant le complément de λ_1. Donc, si l'on forme, d'après la même loi, deux

échelles relatives à $\varkappa$ et $\varkappa'$, trois termes consécutifs seront, dans l'une ... λ, $\varkappa$, λ_1, ..., et dans l'autre ... λ'_1, $\varkappa'$, λ', ..., théorème que vous avez démontré dans le cas de $n = 2$ et de $n = 3$.

On pourrait d'une manière analogue passer à la multiplication par le moyen du module λ_1, de même que par le moyen des autres modules imaginaires.

Faisons $\xi = \frac{u}{n}$, $n = \infty$, on aura dans cette limite $\lambda = 0$, et par conséquent $\Lambda = \frac{\pi}{2}$; les formules $\Lambda = \frac{K}{nM}$, $\Lambda' = \frac{K'}{M}$ donnent

$$nM = \frac{2K}{\pi}, \quad \frac{\Lambda'}{n} = \frac{K'}{nM} = \frac{\pi K'}{2K};$$

on aura de plus

$$y = \sin \operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M}, \lambda\right) = \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{nM}, \lambda\right) = \sin \frac{\pi u}{2K}.$$

La formule (1) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sin \operatorname{am}(n\xi, \varkappa) = \frac{nMy\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2i\Lambda'}{n}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \dfrac{4i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left[1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \dfrac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right]}{\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \dfrac{i\Lambda'}{n}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \dfrac{3i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left[1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \dfrac{(n-2)i\Lambda'}{n}}\right]} \pmod{\lambda}.$$

De là on tire, dans le cas de $n = \infty$,

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{\dfrac{2Ky}{\pi}\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 \dfrac{i\pi K'}{K}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 \dfrac{2i\pi K'}{K}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 \dfrac{3i\pi K'}{K}}\right)\cdots}{\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 \dfrac{i\pi K'}{2K}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 \dfrac{3i\pi K'}{2K}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 \dfrac{5i\pi K'}{2K}}\right)\cdots},$$

y étant $\sin \frac{\pi u}{2K}$. Soient $e^{\frac{i\pi u}{2K}} = U$, $e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$; cette formule se trans-

forme dans celle-ci :

$$\sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$$
$$= \frac{2K}{\pi} A \left(\frac{U - U^{-1}}{2i}\right) \frac{[(1-q^2U^2)(1-q^4U^2)(1-q^6U^2)\ldots][(1-q^2U^{-2})(1-q^4U^{-2})(1-q^6U^{-2})\ldots]}{[(1-q\,U^2)(1-q^3U^2)(1-q^5U^2)\ldots][(1-q\,U^{-2})(1-q^3U^{-2})(1-q^5U^{-2})\ldots]}$$

où l'on a mis $A = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}\right]^2$. Si l'on met dans cette formule $u + iK'$ au lieu de u, U deviendra $\sqrt{q}\,U$; de là on tire, en remarquant que $\sin\operatorname{am}(u + iK') = \frac{1}{\varkappa \sin\operatorname{am} u}$, la valeur de $A = \frac{\pi\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}\,K}$. De la même manière on trouve, au moyen des expressions semblables pour $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u, \ldots$, les valeurs des produits suivants :

$$[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^6 = \frac{2\varkappa'\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}},$$

$$[(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^6 = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa\varkappa'}},$$

$$[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots]^6 = \frac{2\varkappa\varkappa' K^3}{\sqrt{q}\,\pi^3},$$

$$[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^6 = \frac{\varkappa}{4\sqrt{\varkappa'}\sqrt{q}},$$

. . . . ,

sommations très-remarquables, ce me semble.

Comme on a $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K}$, $\frac{\Lambda'_1}{\Lambda} = \frac{1}{n}\frac{K'}{K}$, on voit qu'en mettant seulement q^n ou $q^{\frac{1}{n}}$ au lieu de q on tire de ces formules aussitôt les expressions semblables relatives aux modules transformés λ, λ_1. Ainsi l'on aura, par exemple,

$$\varkappa = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4,$$

$$\lambda = 4\sqrt{q^n}\left[\frac{(1+q^{2n})(1+q^{4n})(1+q^{6n})\ldots}{(1+q^n)(1+q^{3n})(1+q^{5n})\ldots}\right]^4.$$

On ne saura guère reconnaître de la nature de ces produits que ces deux expressions dépendent *algébriquement* l'une de l'autre.

Je remarque encore que, comme on a

$$\varkappa' = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4, \quad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1,$$

on aura aussi

$$\begin{aligned}&[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^8\\ &\quad + 16q[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^8 = [(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^8,\end{aligned}$$

équation difficile à prouver au moyen des méthodes connues. On y saura ajouter nombre d'autres.

Si l'on met $u + \frac{4mK}{n}$ au lieu de u, U change en αU, où $\alpha^n = 1$.

De là se déduit, de la formule pour $\sin \operatorname{am} u$, une nouvelle vérification assez facile de ma première transformation. Je passe à d'autres recherches.

Soit

$$\begin{aligned}&\left(\frac{U - U^{-1}}{2}\right)[(1 - q^2U^2)(1 - q^4U^2)(1 - q^6U^2)\ldots]\\ &\qquad \times [(1 - q^2U^{-2})(1 - q^4U^{-2})(1 - q^6U^{-2})\ldots]\\ &\quad = a'(U - U^{-1}) + a''(U^3 - U^{-3}) + a'''U^5 - U^{-5}) + \ldots.\end{aligned}$$

Si l'on met dans ce produit qU au lieu de U, il sera multiplié par $\left(\frac{qU - q^{-1}U^{-1}}{U - U^{-1}}\right)\left(\frac{1 - U^{-2}}{1 - q^2U^2}\right) = -\frac{1}{qU^2}$. De là suit

$$a'' = -q^2a', \quad a''' = -q^4a'', \quad a^{\text{IV}} = -q^6a''', \ldots,$$

ou

$$\frac{a''}{a'} = -q^2, \quad \frac{a'''}{\alpha'} = +q^{2.3}, \quad \frac{a^{\text{IV}}}{a'} = -q^{3.4}, \quad \frac{a^{\text{V}}}{a'} = +q^{4.5}, \ldots,$$

de sorte qu'on aura ce produit égal à

$$\begin{aligned}&a'[U - U^{-1} - q^2(U^3 - U^{-3}) + q^6(U^5 - U^{-5})\\ &\qquad - q^{12}(U^7 - U^{-7}) + q^{20}(U^9 - U^{-9}) - \ldots].\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve

$$
\begin{aligned}
&[(1 - qU^2)(1 - q^3U^2)(1 - q^5U^2)\ldots] \\
&\quad \times [(1 - qU^{-2})(1 - q^3U^{-2})(1 - q^5U^{-2})\ldots] \\
&\quad = b\,[1 - q(U^2 + U^{-2}) + q^4(U^4 + U^{-4}) \\
&\qquad - q^9(U^6 + U^{-6}) + q^{16}(U^8 + U^8) - \ldots],
\end{aligned}
$$

a' et b désignant des constantes.

On aura donc

$$\sin \operatorname{am} u = C\,\frac{U - U^{-1} - q^2(U^3 - U^{-3}) + q^6(U^5 - U^{-5}) - q^{12}(U^7 - U^{-7}) + \ldots}{1 - q(U^2 + U^{-2}) + q^4(U^4 + U^{-4}) - q^9(U^6 + U^{-6}) + q^{16}(U^8 + U^{-8}) - \ldots}.$$

La constante C se détermine encore au moyen de la formule

$$\sin \operatorname{am}(u + iK') = \frac{1}{k \sin \operatorname{am} u},$$

en remarquant que U change en $\sqrt{q}\,U$ en même temps que u devient $u + iK$. On la trouve égale à $\dfrac{i\sqrt{k}}{\sqrt[4]{q}}$, de sorte qu'il vient, en mettant $u = \dfrac{2Kx}{\pi}$,

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \\
&= \frac{2}{\sqrt{k}}\,\frac{q^{\frac{1}{4}} \sin x - q^{\frac{9}{4}} \sin 3x + q^{\frac{25}{4}} \sin 5x - q^{\frac{49}{4}} \sin 7x + \ldots}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \ldots}.
\end{aligned}
\right.
$$

J'y ajoute les trois semblables

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{q^{\frac{1}{4}} \cos x + q^{\frac{9}{4}} \cos 3x + q^{\frac{25}{4}} \cos 5x + q^{\frac{49}{4}} \cos 7x + \ldots}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \ldots},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \\
&= \sqrt{k'}\,\frac{1 + 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x + \ldots}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \ldots},
\end{aligned}
\right.
$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\\&=\frac{\sin\frac{x}{2}+q\sin\frac{3x}{2}-q^3\sin\frac{5x}{2}-q^6\sin\frac{7x}{2}+q^{10}\sin\frac{9x}{2}+q^{15}\sin\frac{11x}{2}-\ldots}{\cos\frac{x}{2}-q\cos\frac{3x}{2}-q^3\cos\frac{5x}{2}+q^6\cos\frac{7x}{2}+q^{10}\cos\frac{9x}{2}-q^{15}\cos\frac{11x}{2}-\ldots}.\end{aligned}\right.$$

Je remarque encore les formules suivantes :

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots,$$

$$\sqrt{k}=\frac{2\left(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+q^{\frac{49}{4}}+\ldots\right)}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots},$$

$$\sqrt{k'}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots},$$

. . . . ,

dont la première est la plus remarquable.

Quant à l'importance de ces formules, vous la sentirez mieux que je ne pourrais le dire. Aussi elles ne seront pas sans intérêt pour les célèbres géomètres qui s'occupent du mouvement de la chaleur, les numérateurs et les dénominateurs des fractions par lesquelles on a exprimé les fonctions trigonométriques de l'amplitude étant souvent rencontrés dans ladite question. Je finirai l'exposition rapide des résultats principaux trouvés jusqu'ici.

Vous auriez voulu que j'eusse donné la chaine des idées qui m'a conduit à mes théorèmes. Cependant la route que j'ai suivie n'est pas susceptible de rigueur géométrique. La chose étant trouvée, on pourra y substituer une autre sur laquelle on aurait pu y parvenir rigoureusement. Ce n'est donc que pour vous, Monsieur, que j'ajoute le suivant :

La première chose que j'avais trouvée (dans le mars 1827), c'était l'équation $T=\frac{V\,dU}{dx}-\frac{U\,dV}{dx}$; de là je reconnus que, pour un nombre n quelconque, la transformation était un problème d'Analyse algébrique *déterminé*, le nombre des constantes arbitraires égalant toujours celui des conditions. Au moyen des coefficients indéterminés, je formai les transformations relatives aux nombres 3 et 5. L'équation du quatrième degré, à laquelle me mena la première,

ayant presque la même forme que celle qui sert à la trisection, j'y soupçonnai quelque rapport. Par un tâtonnement heureux, je remarquai dans ces deux cas l'autre transformation complémentaire pour la multiplication. Là j'écrivis ma première lettre à M. Schumacher, la méthode générale étant vérifiée par des exemples. Depuis, examinant plus de proche les deux substitutions $z = \frac{ay + by^3}{1 + cy^2}$, $y = \frac{a'x + b'x^3}{1 + c'x^2}$ sous la forme présentée dans ma première lettre, je vis qu'étant mis $x = \sin \operatorname{am} \frac{2K}{3}$, z devra s'évanouir, et comme, dans ladite forme, $\frac{b}{a}$ était positif, j'en conclus que y devra s'évanouir aussi. De cette manière, je trouvai par induction la résolution en facteurs, laquelle étant confirmée par des exemples, je donnai le théorème général dans ma seconde lettre à M. Schumacher. Ensuite, ayant remarqué l'équation

$$\sin \operatorname{am}(i\xi, \varkappa) = i \operatorname{tang} \operatorname{am}(\xi, \varkappa'),$$

j'en tirai la transformation de $\varkappa'$ en λ'. J'avais donc deux transformations différentes, l'une de $\varkappa$ dans un module plus petit λ, l'autre de $\varkappa'$ dans un module plus grand λ'. De là je fis la conjecture qu'en échangeant entre eux $\varkappa'$ et λ, $\varkappa$ et λ', on aurait l'expression analytique de la transformation complémentaire. Tout étant confirmé par des exemples, j'eus la hardiesse de vous adresser une première lettre ([1]), qui a été accueillie de vous avec tant de candeur. Les démonstrations n'ont été trouvées que ci-après.

Le 14 février dernier, j'ai enfin reçu votre excellent cadeau par la bonté de M. de Humboldt, qui me l'a fait parvenir aussitôt qu'il arriva à Berlin. Il fera l'étude de ma vie.

M. Schumacher m'a donné connaissance de ce que vous lui avez écrit du théorème complémentaire; je me suis donc empressé de faire partir cette lettre, et je l'en avertirai. Il faut m'excuser, Monsieur, si la bonne opinion que vous avez bien voulu avoir pour moi me rend un peu timide à présenter des choses trop imparfaites à un si grand maître.

([1]) Je l'avais donnée à un jeune marchand que je ne connaissais pas personnellement; on m'avait dit qu'il allait droitement à Paris; mais il a passé plusieurs mois dans les capitales de l'Allemagne. De là s'est fait, à mon grand dépit, le retard de cette lettre.

M. Crelle m'a écrit que la continuation du Mémoire de M. Abel s'imprime déjà. Je l'attends avec impatience. Quant à M. Gauss, il n'a rien encore publié sur les fonctions elliptiques, mais il est certain qu'il a eu de jolies choses. S'il a été prévenu, et peut-être surpassé, c'est une juste peine de ce qu'il a répandu un voile mystique sur ses travaux. Je ne le connais pas personnellement, ayant étudié la Philologie à Berlin, où il n'y a pas de géomètres de distinction.

Daignez accueillir l'assurance de mon respect le plus profond.

Votre dévoué,

C.-G.-J. Jacobi.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 14 avril 1828 (¹).

Monsieur,

Je viens de recevoir une lettre de M. Schumacher, qui m'apprend que vous ne lui avez rien envoyé pour être imprimé dans son Journal. J'avais l'espérance que votre première publication contiendrait la démonstration de votre théorème II, laquelle m'intéresse d'autant plus, que j'ai lieu de croire que ce n'est que par un artifice nouveau et très-ingénieux que vous êtes parvenu à cette démonstration. En effet, si l'on fait, conformément à vos dénominations,

$$\frac{1}{2}\vartheta = \vartheta' - \vartheta''' + \vartheta^{v} \mp \ldots \mp \vartheta^{p-2}\frac{1}{2}\psi,$$

$$\operatorname{tang}\vartheta' = \frac{\operatorname{tang}\psi}{\sin\psi'}, \quad \operatorname{tang}\vartheta''' = \frac{\operatorname{tang}\psi}{\sin\psi'''}, \ldots,$$

et enfin

$$\lambda^2 + \lambda'^2 = 1, \quad F(\lambda', \psi''') = \frac{m}{p} F^1(\lambda'),$$

on aura la formule du théorème II,

$$F(\varkappa, \vartheta) = \mu F(\lambda, \psi),$$

(¹) Cette lettre s'est croisée avec celle du 12 avril 1828, adressée par Jacobi à Legendre.

laquelle, étant combinée avec celle du théorème I, donne

$$F(\varkappa, \vartheta) = p F(\varkappa, \varphi).$$

Je trouve aisément, par les données du théorème II, qu'en faisant $\gamma' = \cot^2\psi'$, $\gamma''' = \cot^2\gamma'''$, ..., $x = \sin\psi$, $y = \sin\vartheta$, on a

$$y = \frac{\mu x \left(1 + \frac{\lambda^2 x^2}{\gamma'}\right)\left(1 + \frac{\lambda^2 x^2}{\gamma'''}\right)\left(1 + \frac{\lambda^2 x^2}{\gamma^{\text{v}}}\right)\cdots}{(1 + \gamma' x^2)(1 + \gamma''' x^2)(1 + \gamma^{\text{v}} x^2)\cdots},$$

et de là

$$\varkappa = \frac{\gamma'^2 \cdot \gamma'''^2 \cdot \gamma^{\text{v}2} \cdots}{\mu' \lambda^{2n-1}}.$$

Ces valeurs, entièrement déterminées, satisfont à ce beau principe de transformation qui vous est dû, savoir, qu'on peut mettre à la fois $\frac{1}{\varkappa \sin\vartheta}$ à la place de $\sin\vartheta$, et $\frac{1}{\lambda \sin\psi}$ à la place de $\sin\psi$. Mais, pour rendre la démonstration complète et semblable à celle du théorème I, il faudrait, dans l'équation

$$\sqrt{1 - yy} = \sqrt{1 - xx}\, \frac{P}{(1 + \gamma' x^2)(1 + \gamma''' x^2)\cdots},$$

pouvoir exprimer le numérateur P en produit de facteurs

$$(1 + \delta' x^2)(1 + \delta''' x^2)\ldots,$$

dont on connaîtrait l'expression générale. Or c'est ce qui paraît présenter une telle difficulté que je n'ai vu, après plusieurs recherches, aucun moyen de la résoudre. Il serait d'ailleurs fort superflu que j'employasse beaucoup de temps à cette recherche, puisque la gloire de la découverte vous appartiendrait tout entière, et qu'il n'entrerait nullement dans mon esprit d'en revendiquer la moindre partie. Vous voyez donc, Monsieur, combien vous m'obligeriez de vouloir bien satisfaire mon impatience, en donnant les directions nécessaires pour parvenir à votre démonstration. Je présume que ma demande n'exige pas de très-longs développements, et qu'il vous sera facile de me mettre sur la voie de votre belle découverte, qui excite ma curiosité au plus haut degré. *Intelligenti pauca.*

J'ai l'intention d'insérer dans les Mémoires de notre Académie une Notice de vos deux théorèmes, pour réveiller la paresse de nos

jeunes auteurs, et les engager à ne pas rester si longtemps dans l'ignorance de la belle théorie que vous avez su élever à un degré de perfection inattendu.

M. Bessel a mandé à M. Schumacher que vous êtes fortement occupé de la rédaction d'un grand Mémoire sur les *Fonctions elliptiques*. Ce travail contiendra sans doute des développements curieux et très-intéressants de votre nouvelle théorie; il ne pourra manquer de vous faire beaucoup d'honneur, mais je vous engage de ne pas trop tarder à publier les parties essentielles de ce travail. Il y a des gens, comme M. Gauss, qui ne se feraient pas scrupule de vous ravir, s'ils le pouvaient, le fruit de vos recherches, et de prétendre qu'elles sont depuis longtemps en leur possession, prétention bien absurde assurément; car, si M. Gauss était tombé sur de pareilles découvertes, qui surpassent à mes yeux tout ce qui a été fait jusqu'ici en Analyse, bien sûrement il se serait empressé de les publier.

Veuillez, Monsieur, présenter mes civilités à M. Bessel, que je n'ai pas l'honneur de connaître, mais que je regarde comme l'un des premiers astronomes de l'Europe. J'ai vu, dans un numéro des *Astronomische Abhandlungen,* un joli Mémoire de M. Bessel, où il perfectionne la méthode des comètes de M. Olbers, par un moyen semblable à celui que j'ai employé dans le second Supplément de ma méthode, publié en août 1820.

J'ai l'honneur d'être, Monsieur, votre très-humble serviteur,

LEGENDRE.

Je compte sur une prompte réponse, et vous prie instamment de ne point l'affranchir, à moins qu'il ne soit impossible de faire autrement.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 11 mai 1828.

MONSIEUR,

J'ai reçu, le 26 avril, votre dernière lettre datée du 12, où se trouvent contenus les principes de la démonstration de votre théorème complémentaire, qu'il me tardait d'autant plus de recevoir de

vous que je n'avais guère espérance de trouver cette démonstration par mes propres recherches, comme j'aurais pu faire peut-être dans un âge moins avancé où l'on est capable de supporter plus aisément une grande contention d'esprit. Je vous avais écrit le 14 du même mois pour obtenir de votre complaisance cette communication qui m'intéresse au plus haut degré, mais je vois, par la date de votre lettre, que c'est à la pressante sollicitation de M. Schumacher que vous vous êtes rendu à mes désirs, et que vous les avez en quelque sorte prévenus. Maintenant, Monsieur, vous apprendrez peut-être, avec quelque peine, que depuis le 26 avril que votre lettre m'est parvenue je n'ai pas été encore en état de me faire une juste idée de la belle méthode par laquelle vous êtes parvenu à déduire votre théorème II ou complémentaire du théorème I, dont la démonstration ne laisse rien à désirer. N'en concluez pas que j'aie quelque objection à faire à votre méthode qui, sans doute, est une nouvelle preuve de votre sagacité; mais j'ai été tellement malade d'un catarrhe qui m'a tourmenté tout l'hiver et qui s'est singulièrement aggravé au printemps, que toute étude sérieuse m'a été interdite depuis une vingtaine de jours, et que je suis devenu incapable d'entendre mes propres ouvrages. Cet état commence cependant à s'améliorer, et j'espère dans peu être en état de reprendre mes occupations ordinaires : ce sera pour moi une grande satisfaction de pouvoir comprendre votre nouvelle démonstration qui sera la première chose dont je m'occuperai. En attendant qu'un examen approfondi me mette en état d'apprécier toute sa valeur, je dois vous faire part d'une ou deux observations peu importantes. Ayant établi $\omega = \frac{m\mathrm{K}}{n} + \frac{2m'i\mathrm{K}'}{n}$, vous dites qu'on peut prendre pour m et m' des nombres entiers quelconques, *mais qui n'aient aucun diviseur commun avec le nombre impair donné* n. Il me semble que, si cette restriction avait lieu, l'équation pour la division d'une fonction elliptique en n parties ne serait plus du degré n^2, ce qui a pourtant lieu même quand n n'est pas un nombre premier.

Seconde observation. — Pour établir le principe de votre démonstration, il faut, dites-vous, recourir aux formules analytiques concernant la multiplication, *données pour la première fois* par M. Abel. Cet aveu, qui prouve votre candeur, qualité qui s'accorde si bien avec le vrai talent, me fait quelque peine; car, tout en ren-

dant justice au beau travail de M. Abel, et le mettant cependant fort au-dessous de vos découvertes, je voudrais que la gloire de celle-ci, c'est-à-dire de leurs démonstrations, vous appartînt tout entière. Mais enfin je me consolerai aisément, la science n'y perd rien; vos démonstrations ne vous appartiennent pas moins, quelque part que vous en ayez pris les bases, soit dans mes ouvrages, soit dans le travail récent et très-estimable de M. Abel.

L'espace me manque pour m'étendre davantage dans une réponse qui n'est que provisoire. Je vous remercierai une autre fois de la franchise entièrement gracieuse avec laquelle vous avez satisfait à ma demande sur les moyens que vous aviez employés pour parvenir à de si beaux résultats.

Votre tout dévoué,

LEGENDRE.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 11 mai 1828.

MONSIEUR,

Depuis le jour où je me suis trouvé en état de vous écrire pour vous faire mes remercîments au moins provisoires sur les précieux renseignements que vous aviez eu l'obligeance de m'adresser dans votre lettre du 12 avril dernier, ma santé s'étant progressivement améliorée, j'ai enfin réussi à déduire la démonstration du théorème II de celle du théorème I, sans avoir recours aux formules de M. Abel, ce qui m'a entièrement satisfait; je serais parvenu sans doute beaucoup plus tôt à ce résultat, si j'avais pu me livrer à un examen plus approfondi des différents objets contenus dans votre lettre; mais l'état de souffrance où je suis resté pendant longtemps m'avait rendu incapable de tout travail, et m'aurait même empêché d'entendre mes propres ouvrages. Maintenant, Monsieur, je me propose de rédiger un Mémoire qui contiendra la démonstration de vos deux théorèmes et quelques accessoires, en me conformant aux principes de votre théorie, et rendant d'ailleurs toute la justice que je dois au mérite de vos découvertes, que personne ne sait et ne saura jamais mieux apprécier que moi. Ce Mémoire est destiné à paraître dans le Recueil des Mémoires de notre

Académie, mais il ne pourra pas être imprimé de sitôt, et vous aurez sans doute le temps de faire paraitre, bien à l'avance, la suite de vos savantes recherches, soit dans le *Journal de M. Schumacher,* soit dans tout autre Recueil destiné aux Sciences.

Je n'ai pu que toucher très-légèrement, dans ma dernière lettre, ce que j'avais à vous dire sur la communication pleine de franchise que vous m'avez faite de la filiation des idées qui vous ont conduit à vos belles découvertes sur les fonctions elliptiques : je vois que nous avons couru tous deux des dangers, *vous* en annonçant des découvertes qui n'étaient pas encore revêtues du sceau d'une démonstration rigoureuse, et *moi* en leur donnant publiquement et sans restriction mon approbation tout entière. Nous n'avons pas à nous repentir ni l'un ni l'autre de ce que nous avons fait. D'ailleurs nous avions chacun nos raisons de nous conduire ainsi ; je ne dirai rien des vôtres ; quant à moi, je voyais très-clairement que des résultats tels que ceux que vous aviez obtenus ne pouvaient être l'effet ni du hasard, ni d'une induction trompeuse, mais bien d'une théorie profonde et appuyée sur la nature des choses ; d'ailleurs il m'avait été facile, au moyen de mes Tables et avec très-peu de calcul, de vérifier vos résultats pour le cas du nombre 7, et, après les avoir trouvés exacts jusqu'à cinq ou six décimales, il ne me restait aucun doute sur l'exactitude rigoureuse de la formule.

Vous avez eu la bonté, dans votre dernière lettre, et dans les précédentes, de me réduire à des expressions plus simples quelques-uns des beaux résultats de M. Abel. Je trouve comme vous que ces résultats, qui sont fort intéressants, ont été présentés par leur jeune et ingénieux auteur d'une manière fort méthodique, mais un peu embrouillée ; je ne vois pas, par exemple, pourquoi il s'est si fort appesanti sur les propriétés des fonctions qu'il désigne par f et F ; sans doute il aurait pu atteindre son but sans le secours de ces fonctions. Au reste, je pense que dans la suite de vos publications vous présenterez à votre manière les belles formules de M. Abel, et que vous donnerez à son travail plus de précision sans qu'il perde rien de son élégance ni de sa généralité.

Agréez, Monsieur, les sentiments d'estime et d'attachement que j'ai voués pour toujours à votre talent et à votre caractère.

LEGENDRE.

P.-S. — Il serait possible que je fasse bientôt un voyage de deux

mois dans le midi de la France pour rétablir ma santé. Dans ce cas il ne faudrait pas vous étonner si une lettre que vous pourriez m'adresser dans cet intervalle restait assez longtemps sans réponse, parce que je n'en aurais connaissance qu'à mon retour.

Jacobi à Legendre.

Königsberg, le 9 septembre 1828.

Monsieur,

La lettre dans laquelle vous m'aviez mandé votre maladie de l'hiver passé m'a causé de grandes peines, et j'ai attendu avec la plus vive inquiétude la nouvelle de l'amélioration de votre santé qui m'est enfin parvenue. L'avis que vous avez voulu me donner en même temps de votre départ pour le midi de la France a causé le retard de ma réponse. Fasse le ciel que ce voyage vous ait entièrement satisfait!

Ma dernière lettre a été écrite un peu à la hâte; sans cela je n'aurais pas cru que l'on doit supposer connues les formules de multiplication pour la démonstration du théorème complémentaire. Aussi il avait été trouvé et communiqué à vous sans la connaissance de celles-ci. En effet, l'équation $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K}$ montre que $\varkappa$ dépend de la même manière de λ que λ' de $\varkappa'$; d'où il suit qu'en appliquant au module λ la même transformation qui sert à parvenir du module $\varkappa'$ au module λ' il faut retomber sur le module $\varkappa$.

Vous aurez reçu sans doute deux Mémoires de M. Abel, l'un inséré dans le *Journal de M. Crelle*, l'autre dans les *Nouvelles astronomiques de M. Schumacher*. Vous y aurez vu que M. Abel a trouvé de son côté la théorie générale de la transformation, dans la publication de laquelle je l'ai prévenu de six mois. Le second Mémoire, inséré dans le *Recueil de M. Schumacher*, n° 138, contient une *déduction* rigoureuse des théorèmes de transformation, dont le défaut s'était fait sentir dans mes annonces sur le même objet. Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux.

Dans le même cahier du *Journal de M. Crelle* (t. III, 2ᵉ cahier) où se trouvent les premiers travaux de M. Abel sur la transformation, j'avais fait insérer la remarque que toutes les transformations attachées au nombre n sont au nombre $n+1$, lorsque n est premier, et que l'on trouvait tous les modules transformés qui s'y rapportent en mettant, dans la formule

$$\sqrt{z} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{p^{25}} + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots},$$

q^n et $\sqrt[n]{q}$ au lieu de q, $\sqrt[n]{q}$ ayant n valeurs différentes. M. Abel verra donc que les transformations imaginaires ne m'étaient pas échappées. Que n soit premier ou non, le nombre des transformations sera en général égal à la somme des facteurs de n; on trouve tous les modules transformés en mettant $\sqrt[a]{q^{a'}}$ au lieu de q, aa' étant $= n$. Cette théorie est complète, de sorte qu'on ne saura y ajouter. Toutes les racines des équations modulaires se trouvent par là développées dans des séries d'une élégance et d'une convergence sans exemple dans l'Analyse. Je remarque encore que, n étant un nombre carré, on aura une seule fois $a = a'$; donc un seul des modules transformés sera, dans ce cas, égal à celui d'où l'on est parti, ce qui fournit la multiplication.

Vous ne m'avez dit dans deux de vos lettres pas un seul mot sur ces séries remarquables sommées par les fonctions elliptiques, dans lesquelles les exposants suivent la loi des nombres carrés, et dont celle-ci :

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \dots$$

me paraît être l'un des résultats les plus brillants de toute la théorie. Tout ce qui regarde la décomposition des nombres en nombres carrés devient, par ces séries, du ressort des fonctions elliptiques. Les développements de celles-ci me donnent, par exemple,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 &= 1 + \frac{8q}{1-q} + \frac{16q^2}{1+q^2} + \frac{24q^3}{1-q^3} + \frac{32q^4}{1+q^4} + \dots \\ &= 1 + \frac{8q}{(1-q)^2} + \frac{8q^2}{(1+q^2)^2} + \frac{8q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{8q^4}{(1+q^4)^2} + \dots \\ &= 1 + 8\Sigma\varphi(p)(q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{8p} + 3q^{16p} + 3q^{32p} + \dots),\end{aligned}$$

p étant un nombre impair quelconque, et $\varphi(p)$ la somme des facteurs de p. Comme dans cette série il ne manque aucune puissance de p, et qu'on a en même temps

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots)^4,$$

il suit comme corollaire de cette formule le fameux théorème de Fermat, que chaque nombre est la somme de quatre carrés. Les théorèmes relatifs aux nombres qui sont la somme des deux carrés découlent de la formule suivante :

$$\begin{aligned}\frac{2K}{\pi} &= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots)^2 \\ &= 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1-q^3} + \frac{4q^5}{1-q^5} - \frac{4q^7}{1-q^7} + \ldots \\ &= 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1+q^2} + \frac{4q^6}{1-q^3} - \frac{4q^{10}}{1+q^4} + \frac{4q^{15}}{1-q^5} - \frac{4q^{21}}{1+q^6} + \ldots.\end{aligned}$$

Parmi d'autres formules, je trouve encore la suivante, digne de vous être communiquée :

$$\begin{aligned}&(q - q^{5.5} - q^{7.7} + q^{11.11} + q^{13.13} - q^{17.17} - q^{19.19} + q^{23.23} + \ldots)^3 \\ &\quad = q^3 - 3q^{3.3.3} + 5q^{3.5.5} - q^{3.7.7} + 9q^{3.9.9} - 11q^{3.11.11} + \ldots,\end{aligned}$$

dont vous saisirez aisément la loi. Elle résulte de la transformation attachée au nombre 3.

Ne vous fait-il pas de plaisir, Monsieur, de voir se rapprocher l'une à l'autre deux théories si hétérogènes en apparence et qui se datent en quelque sorte de vos travaux?

Je vais ajouter quelques remarques isolées telles qu'elles se présentent à mon esprit. Rappelons la formule donnée dans ma dernière lettre :

$$\begin{aligned}&\sqrt{k}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} \\ &\quad = \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - 2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \ldots}.\end{aligned}$$

Il m'a paru d'importance de pouvoir exprimer à part le numérateur et le dénominateur de cette expression au moyen des fonctions elliptiques, ce qui n'est pas facile.

En me servant de vos signes, et mettant F^1 au lieu de K, $\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, et par conséquent $\frac{2Kx}{\pi} = F$, je trouve

$$1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \ldots$$
$$= \sqrt{\frac{2\varkappa' F^1}{\pi}}\, e^{\int \frac{F^1 E - E^1 F}{F^1 \Delta(\varphi)} d\varphi},$$

l'intégrale étant prise depuis zéro jusqu'à φ.

L'un de vos plus beaux théorèmes est que l'expression

$$\int \frac{\varkappa^2 \sin A \cos A \Delta(A) \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - \varkappa^2 \sin^2 A \sin^2\varphi)\Delta(\varphi)} - \frac{F(\varphi)}{F^1}[F^1 E(A) - E^1 F(A)]$$

ne change pas de valeur si l'on échange entre eux les angles φ et A. Or étant mis $A = \operatorname{am}\frac{2K\alpha}{\pi}$, $\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, je la trouve égale à

$$\frac{1}{2}\log\left[\frac{1 - 2q\cos 2(x-\alpha) + 2q^4\cos 4(x-\alpha) - 2q^9\cos 6(x-\alpha) + 2q^{16}\cos 8(x-\alpha) - \ldots}{1 - 2q\cos 2(x+\alpha) + 2q^4\cos 4(x+\alpha) - 2q^9\cos 6(x+\alpha) + 2q^{16}\cos 8(x+\alpha) - \ldots}\right],$$

formule symétrique en x et α. *D'ailleurs elle montre que les fonctions elliptiques de troisième espèce dans lesquelles entrent trois variables se ramènent à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux*, découverte qui vous intéressera beaucoup.

Mes recherches seront rassemblées dans un petit Ouvrage d'environ 200 pages in-4°, qui sera imprimé à part et dont l'impression vient d'être commencée. Il aura pour titre : *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*. Peut-être je serai assez heureux de vous le présenter moi-même.

Il faut avouer, Monsieur, que je suis un peu fatigué de la matière, qui m'a occupé pendant dix-huit mois presque jour et nuit. Cependant la fin de mon Ouvrage ne doit pas être celle de mes recherches; il en reste encore d'une grande importance, mais aussi d'une grande difficulté. Je vous prie instamment de me donner des nouvelles de vous et surtout de votre santé. Vous pourriez compter sur une prompte réponse.

Votre très-humble et très-dévoué,

C.-G.-J. Jacobi.

M. Bessel vous rend grâce de vos civilités; je vous prie d'en faire

de ma part à M. Cauchy, dont j'ai toujours estimé de préférence les écrits ingénieux et d'une rare subtilité. Les formules analytiques qui renferment le théorème de Fermat ne seront pas sans intérêt pour ce géomètre, qui a tant de mérite dans cette partie de la théorie des nombres.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 15 octobre 1828.

Je vous envoie, Monsieur, un premier Supplément à mon Traité, contenant vos deux théorèmes généraux sur la transformation de la fonction elliptique de première espèce. Ce qu'il y aura de bon dans ce supplément vous appartient; je ne suis en quelque sorte que votre commentateur, parfois long et diffus, parce qu'il faut plus de développements dans un Traité que dans un Mémoire. D'ailleurs je me suis complu dans l'énumération des beaux résultats d'Analyse qu'on était loin de soupçonner avant que vous les eussiez fait connaître. Le célèbre astronome Plana, de Turin, qui est en même temps un géomètre très-distingué, vient de rendre hommage à vos découvertes dans un écrit où il fait des efforts pour parvenir méthodiquement à vos théorèmes. S'il n'a pas très-bien réussi, c'est une preuve de plus de la difficulté que vous avez trouvé le moyen de surmonter.

Le voyage que je projetais n'a pas eu lieu. Je suis resté, et j'ai profité d'un intervalle de quelques mois où ma santé s'est un peu améliorée pour travailler à mon Supplément. J'y ai employé le peu de forces qui me restent; car déjà mon catarrhe menace de me ressaisir, et je pourrais bientôt être hors d'état de m'occuper d'un second Supplément. Au reste, le monde savant n'y perdra rien, et je puis me reposer sur le zèle de deux athlètes infatigables tels que vous et M. Abel. Ce dernier a publié, dans le *Journal de M. Crelle*, la suite de son beau Mémoire, où, entre autres choses fort intéressantes, on trouve la démonstration de votre théorème général de transformation, démonstration que vous avez la modestie de placer au-dessus de la vôtre. Il a ensuite publié, dans le *Journal de*

M. Schumacher, d'autres recherches, où il montre beaucoup de profondeur et de sagacité. Pour vous, Monsieur, vous n'êtes pas resté en arrière, et vous avez continué de publier, dans ces deux Recueils, un grand nombre de résultats nouveaux qui doivent intéresser au plus haut degré les analystes, surtout lorsque vous en aurez fait connaître les démonstrations.

Votre Lettre du 9 septembre m'apprend d'autres particularités sur vos travaux. J'y ai vu surtout avec un grand plaisir que vous avez commencé l'impression d'un ouvrage in-4° de 200 pages qui sera intitulé : *Fundamenta nova theoriæ,* etc. Je serai doublement satisfait si je puis recevoir cet Ouvrage de votre main, comme vous me le faites espérer, et il me sera bien agréable de voir, de mes yeux, l'un des deux jeunes géomètres qui, par leurs découvertes, ont contribué le plus à perfectionner mes travaux.

J'induis de vos expressions que la composition de votre Ouvrage est terminée, et qu'ainsi nous pourrons en jouir bientôt. Il me sera très-utile pour y prendre la matière de deux ou trois Suppléments que je voudrais joindre à mon Traité pour le mettre au courant de vos nouvelles découvertes. Je commencerais ainsi un troisième volume qui ne serait pas inférieur aux deux autres; et, comme vous traiterez sans doute de la plupart des objets dont M. Abel s'est occupé, votre Ouvrage me dispensera de recourir à ceux de M. Abel, dont la manière, quoique très-méthodique, me paraît difficile à saisir. Je n'aime point ses fonctions f et F, et je pense que dans vos explications, dont vous m'avez déjà donné un échantillon, vous trouverez moyen de vous en passer.

J'applaudis à la théorie que vous donnez de l'équation modulaire et que vous regardez comme complète; j'y applaudirai encore mieux quand je connaîtrai vos démonstrations. C'est un grand point à mes yeux d'avoir prouvé que, pour le nombre premier p, l'équation modulaire est toujours du degré $p+1$. Vous donnez par des séries très-élégantes les racines de cette équation dont deux seulement sont réelles. Celles-ci sont le module h qui suit le module donné k, et le module k_1 qui le précède, en sorte que trois termes consécutifs de l'échelle sont k_1, k, h. J'en conclus que, si l'on se servait de l'équation modulaire pour calculer les autres termes de l'échelle, l'équation à résoudre pour passer d'un terme au suivant ne serait que du degré p. Il reste à examiner si les auxiliaires α_m et β_m, qui

entrent dans les formules de vos deux théorèmes, peuvent être déterminées par les termes connus de l'échelle, comme cela a lieu pour le cas de $p = 5$, ou si elles exigent la résolution d'une équation, et quel est le degré réduit de cette équation. M. Abel dit qu'elle est du degré $p + 1$ (sans supposer connus les termes de l'échelle); mais cela n'est pas encore démontré, et c'est un point qu'il faudrait éclaircir pour la perfection de votre théorie.

Si j'ai gardé le silence jusqu'ici sur les belles séries en fonctions de q, que vous êtes parvenu à sommer et qui seront un des plus beaux ornements de votre Ouvrage, c'est que j'attendais que vous en donnassiez la démonstration. Du reste, je les regarde comme un nouveau titre que vous avez acquis à l'estime des savants, et il en est de même de vos nouvelles fonctions Θx et $\mathrm{H} x$, avec lesquelles vous avez réussi à exprimer très-simplement une fonction de la troisième espèce qui se rapporte à l'espèce de paramètre que j'ai nommé *logarithmique*. Il vous sera sans doute également facile d'exprimer semblablement la fonction qui se rapporte au paramètre *circulaire;* vous avez découvert en tout cela une nouvelle mine fort intéressante à exploiter et qui mène à un grand nombre de résultats curieux. Remarquons cependant que la théorie des transformations doit son élégance et l'on peut dire sa perfection à ce qu'elle est indépendante des idées et que tout s'y détermine algébriquement.

Je remarque au surplus que votre possession à vous et à M. Abel est maintenant bien assurée. L'envahisseur, M. G..., ne s'avisera point, je pense, d'écrire qu'il avait trouvé tout cela longtemps avant vous; car s'il disait pareille chose, il se ferait moquer de lui.

J'ai vu que vous aviez acquis le titre de professeur dans votre Université; je vous en fais mon compliment bien sincère; car rien de ce qui touche à votre avancement et à vos succès ne saurait m'être indifférent.

Votre dévoué serviteur,

LEGENDRE.

Jacobi à Legendre.

Königsberg, le 18 janvier 1829.

Monsieur,

Il faut que vous soyez assez fâché de moi à cause du grand retard de ma réponse à votre dernière lettre, et je ne saurais à peine m'excuser si ce n'est que j'ai voulu finir, avant de vous répondre, plusieurs travaux très-difficiles sur les *Fonctions elliptiques*, pour pouvoir vous en mander les résultats. Je ne veux vous parler à présent que du problème le plus important de ceux que je suis parvenu à résoudre dans ces derniers temps : c'est la résolution algébrique et générale de l'équation du degré n^2, de laquelle dépend la division de la fonction elliptique en n parties égales. Je vous prie, Monsieur, de me permettre d'entrer là-dessus dans un grand détail.

Après que vous aviez résolu, le premier, l'équation du neuvième degré, de laquelle dépend la trisection des fonctions elliptiques, nous remarquâmes en même temps, M. Abel et moi, que l'on peut généralement réduire l'équation algébrique du degré n^2, de laquelle dépend la $n^{\text{ième}}$ section, à deux équations du $n^{\text{ième}}$ degré seulement. Ce résultat était une conséquence de la remarque que j'avais faite, que l'on peut parvenir à la multiplication en appliquant à la fonction elliptique deux transformations l'une après l'autre. En lisant avec attention le premier Mémoire de M. Abel sur les *fonctions elliptiques*, on reconnaît aisément qu'il a effectivement suivi la même route, sans cependant soupçonner, lors du temps qu'il composa son Mémoire, que c'était le *medium* des transformations par lequel il passa. Soit $z = \sin \operatorname{am}(nu)$, $x = \sin \operatorname{am}(u)$, n étant un nombre impair quelconque ; si l'on a

$$z = \frac{b'y + b'''y^3 + \ldots + b^{(n)}y^n}{b + b''y^2 + \ldots + b^{(n-1)}y^{n-1}}, \tag{1}$$

$$y = \frac{a'x + a'''x^3 + \ldots + a^{(n)}x^n}{a + a''x^2 + \ldots + a^{(n-1)}x^{n-1}}, \tag{2}$$

y étant le sinus amplitude de la fonction transformée, il faut,

d'après ce que je viens de dire, pour avoir x en z, exprimer en premier lieu x en y, en résolvant algébriquement l'équation (2); puis, en résolvant encore l'équation (1), il faut exprimer par z toutes les fonctions de y qui se trouveront sous les radicaux. Or, comme on a toujours plusieurs transformations qui répondent à un même nombre n, on trouvera, de cette manière, différentes formules algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section, d'après les différentes transformations par lesquelles on est passé à la multiplication. On pouvait cependant soupçonner qu'il y avait une manière d'exprimer x en z plus simple et qui n'était qu'unique. J'ai fait connaître cette forme la plus simple sous laquelle on peut présenter les expressions algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section, dans une petite addition faite au premier Mémoire sur les *Fonctions elliptiques*, et laquelle se trouve dans le *Journal de M. Crelle*, t. 3. Elle est fondée sur une formule très-remarquable, et dont je veux vous parler en peu de mots.

Partons des deux formules connues pour la transformation des fonctions elliptiques, qui donnent ensemble la multiplication :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) &= \sin\operatorname{am}(u) + \sin\operatorname{am}\left(u+\frac{4K}{n}\right) + \ldots \\ &\quad + \sin\operatorname{am}\left[u+\frac{4(n-1)K}{n}\right],\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{n\varkappa M}{\lambda}\sin\operatorname{am}(nu) &= \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) + \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}+\frac{4iK'}{nM},\lambda\right) + \ldots \\ &\quad + \sin\operatorname{am}\left[\frac{u}{M}+\frac{4(n-1)iK'}{nM},\lambda\right],\end{aligned}\right.$$

i étant $\sqrt{-1}$. Au moyen de l'équation (1), on tire de la formule (2) celle qui suit :

$$(3)\qquad n\sin\operatorname{am}(nu) = \Sigma\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{mK+m'iK'}{n}\right),$$

en donnant à m, m' les valeurs 0, 1, 2, ..., $n-1$. Cette dernière formule a été déjà donnée par M. Abel.

Dans le cas de n premier, le seul que nous considérons pour plus de simplicité, on a $n+1$ formules analogues à la formule (1), et qui répondent aux diverses transformations du module $\varkappa$, attachées

au nombre n. Elles sont contenues toutes sous la formule générale

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) &= \sin\operatorname{am}(u)+\sin\operatorname{am}(u+4\omega)+\ldots \\ &\quad+\sin\operatorname{am}[u+4(n-1)\omega],\end{aligned}\right.$$

ω ayant une des $n+1$ valeurs suivantes :

$$\frac{K}{n},\ \frac{iK'}{n},\ \frac{iK'}{n}+\frac{2K}{n},\ \frac{iK'}{n}+\frac{4K}{n},\ldots,\ \frac{iK'}{n}+\frac{2(n-1)K}{n},$$

et les quantités λ, M étant déterminées de la même manière par ω qu'elles sont déterminées par $\frac{K}{n}$ dans la formule (1). Nommons les valeurs de λ, M qui répondent à ces différentes valeurs de ω,

$$\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ldots,\ \lambda_n;\quad M,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ldots,\ M_n;$$

si l'on ajoute ensemble les $n+1$ quantités suivantes :

$$\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right),\quad \frac{\lambda_1}{\varkappa M_1}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_1},\lambda_1\right),$$
$$\frac{\lambda_2}{\varkappa M_2}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_2},\lambda_2\right),\ldots,\ \frac{\lambda_n}{\varkappa M_n}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_n},\lambda_n\right),$$

en substituant pour chacune sa valeur tirée de l'équation générale (4), on trouve

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\frac{\lambda_1}{\varkappa M_1}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_1},\lambda_1\right)+\ldots+\frac{\lambda_n}{\varkappa M_n}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_n},\lambda_n\right) \\ &\quad= n\sin\operatorname{am}(u)+\Sigma\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right) \\ &\quad= n\sin\operatorname{am}(u)+n\sin\operatorname{am}(nu).\end{aligned}\right.$$

En effet, on voit aisément qu'il se trouve, dans la somme dont on parle, tous les termes de l'expression $\Sigma\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right)$, et qu'ils ne s'y trouvent qu'une seule fois, excepté seulement le terme $\sin\operatorname{am}(u)$, qui s'y trouve $n+1$ fois. De l'équation (5) on tire celle qui suit :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin\operatorname{am}(u) \\ &\quad=\frac{\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\frac{\lambda_1}{\varkappa M_1}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_1},\lambda_1\right)+\ldots+\frac{\lambda_n}{\varkappa M_n}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_n},\lambda_n\right)-n\sin\operatorname{am}(nu)}{n}.\end{aligned}\right.$$

C'est la formule remarquable dont j'ai parlé, et qui est de la plus grande importance dans la théorie de la division des fonctions elliptiques. En effet, lorsqu'il s'agit d'exprimer $\sin \mathrm{am}(u)$ par $\sin \mathrm{am}(nu)$, on n'a plus qu'à exprimer par $\sin \mathrm{am}(nu)$ les quantités $\sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M_p}, \lambda_p\right)$, ce qui se fait par la résolution d'équations algébriques du $n^{\text{ième}}$ degré seulement. Je vais rapporter à présent les expressions algébriques et générales des racines de ces dernières.

Soit toujours $\sin \mathrm{am}(nu) = z$, et désignons par $\Phi(nu, \omega)$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\Phi(nu, \omega) = (1 - x^2 \sin^2 \mathrm{am}\, 4\omega\, z^2)(1 - x^2 \sin^2 \mathrm{am}\, 8\omega\, z^2)\ldots \\ \times (1 - x^2 \sin^2 \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega\, z^2);\end{aligned}$$

nommons de plus $A^{(p)}$ l'expression suivante :

$$A^{(p)} = \frac{\Phi(4p\omega, \omega)\,\Phi(nu, \omega)}{\Phi(nu + 4p\omega, \omega)};$$

je dis qu'on a

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\lambda}{xM} \sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) \\ &\quad = \sin \mathrm{am}(nu) + \sin \mathrm{am}(nu + 4\omega)\sqrt[n]{A'} + \sin \mathrm{am}(nu + 8\omega)\sqrt[n]{A''} + \ldots \\ &\qquad + \sin \mathrm{am}[nu + 4(n-1)\omega]\sqrt[n]{A^{(n-1)}}.\end{aligned}\right.$$

Les quantités $A^{(p)}$ seront de la forme $P + Q\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}$, P et Q étant des fonctions rationnelles de z.

Voici une formule entièrement nouvelle pour la transformation des fonctions elliptiques, et laquelle ne pourra être déduite d'aucune façon des formules connues jusqu'ici, quoique, une fois trouvée, on pût la vérifier par les premiers éléments de la théorie des fonctions elliptiques, et même sans supposer connues les formules de transformation ordinaires. La découverte de cette formule m'a coûté beaucoup de peine, et c'est peut-être pourquoi je voudrais la compter pour le résultat le plus important de tout ce que j'ai trouvé jusqu'ici.

Les formules (6) et (7) donnent aussitôt les formules algébriques et générales pour exprimer $\sin \mathrm{am}(u)$ par $\sin \mathrm{am}(nu)$. Nommons,

pour cet effet, $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les différentes valeurs de ω qui répondent aux différents modules transformés $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et soit $A_m^{(p)}$ une expression qui dépend de la même manière de ω_m que $A^{(p)}$ dépend de ω; on trouve

$$\begin{aligned}
& n \sin \operatorname{am}(u) \\
& \quad = \sin \operatorname{am}(nu) \\
& \quad + \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega)\sqrt[n]{A'} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega)\sqrt[n]{A''} + \ldots \\
& \quad + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega]\sqrt[n]{A^{(n-1)}} \\
& \quad + \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega_1)\sqrt[n]{A'_1} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega_1)\sqrt[n]{A''_1} + \ldots \\
& \quad + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega_1]\sqrt[n]{A_1^{(n-1)}} \\
& \quad + \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega_2)\sqrt[n]{A'_2} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega_2)\sqrt[n]{A''_2} + \ldots \\
& \quad + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega_2]\sqrt[n]{A_2^{(n-1)}} \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \quad + \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega_n)\sqrt[n]{A'_n} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega_n)\sqrt[n]{A''_n} + \ldots \\
& \quad + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega_n]\sqrt[n]{A_n^{(n-1)}}.
\end{aligned}$$

C'est l'expression algébrique pour la $n^{\text{ième}}$ section des fonctions elliptiques, laquelle est composée, comme on voit, de

$$(n+1)(n-1) = n^2 - 1$$

$n^{\text{ièmes}}$ racines; les quantités qui se trouvent sous les radicaux sont toutes de la forme $P + Q\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}$, P et Q étant des fonctions rationnelles de z. Vous trouverez ce résultat parmi d'autres dans le *Journal de M. Crelle;* du nombre de ces derniers sont les formules générales pour la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce. Les limites d'une lettre ne me permettent pas d'entrer, dans ce moment, dans un plus grand détail. Je vous entretiendrai une autre fois de la manière dont je suis parvenu à la formule (7), laquelle pourra paraître assez étrangère, comme elle est fondée sur la considération des séries, et surtout sur les propriétés remarquables de mes nouveaux transcendants H, Θ, au moyen desquels on peut exprimer rationnellement tous les radicaux. Ainsi, par exemple, ω étant $= \dfrac{K}{n}$,

on a

$$\sqrt[n]{\lambda^{(p)}} = \frac{\Theta(\text{o})\Theta\left(nu + \frac{4pK}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{4pK}{n}\right)\Theta(nu)},$$

$\Theta(u)$ étant $\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\, e^{\int_0^{\varphi} \frac{F^1E - E^1F}{F^1\Delta} d\varphi}$, $\qquad \varphi = \text{am}(u)$.

Cependant, comme je l'ai dit, on peut aussi vérifier la formule (7) en quantités finies.

A cause de l'extension inattendue qu'ont prise mes travaux, je partagerai mon Ouvrage en deux Parties, dont la première sera publiée dans trois mois environ : je vous en ferai hommage dès que son impression sera achevée. Dans des Notes et des Additions jointes à la première Partie, j'exposerai ce qui est particulier à M. Abel, en rapprochant les méthodes de cet auteur de celles dont j'ai fait usage moi-même.

Il faut vous rendre encore mille grâces pour l'envoi de votre premier Supplément : tout ce qu'il contient vous appartient sous tant de titres que ce n'est que votre bonté qui m'y a fait prendre tant de part. C'est encore à vous, Monsieur, que je suis redevable de la place de professeur dont vous êtes assez obligeant de me féliciter. Une gazette de Berlin ayant fait mention de la communication que vous avez faite à votre Académie de mes travaux, l'autorité de votre nom a été la cause que le Ministre m'a placé.

Vous m'avez donné de grandes inquiétudes sur votre santé dans votre dernière Lettre; il faut que vous m'en arrachiez sitôt qu'il vous sera possible : je vous en prie instamment.

Ce serait trop me punir pour le retard de ma réponse par un retard de votre côté; c'est la division des fonctions elliptiques qu'il faut accuser là-dessus.

Votre entièrement dévoué serviteur,

C.-G.-J. JACOBI.

Je vous prie, Monsieur, de faire parvenir la lettre ci-adjointe au célèbre orientaliste, M. Klaproth; veuillez me pardonner si j'ose vous faire tant de peine.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 9 février 1829.

Monsieur,

Votre lettre du 18 janvier, que j'ai reçue le 30, m'a fait beaucoup de plaisir; l'intérêt de cette correspondance va toujours en augmentant par le nombre et l'importance des découvertes dont vous me donnez communication. Je ne puis lire qu'avec peine les formules, parce que l'espace vous manque et le temps peut-être, pour bien former les caractères; mais ce que j'y puis apercevoir me donne la plus haute idée des beaux résultats auxquels vous êtes parvenu pour la division des fonctions en n parties. Je n'aurais jamais imaginé qu'il fût possible de résoudre ainsi explicitement une équation du degré nn, et de former, d'une manière praticable, les différents termes de la formule. C'est un grand tour de force qui vous fera infiniment d'honneur, et il me tarde de recevoir l'Ouvrage où vous donnerez des développements assez étendus sur cette découverte, pour que j'en puisse faire mon profit et l'insérer dans mes Suppléments, après que je l'aurai moi-même suffisamment comprise.

De son côté, M. Abel publie, d'une manière assez suivie, des Mémoires qui sont de véritables chefs-d'œuvre, et, comme il n'a pas à sa disposition les moyens de faire imprimer l'ensemble de ses recherches, cette raison le détermine à développer davantage ce qu'il publie dans les journaux de MM. Crelle et Schumacher. Il obtient ainsi sur vous une sorte d'avantage, parce que vous n'avez guère publié jusqu'à présent que des Notices qui ne font pas connaître vos méthodes. C'est une raison pour que vous vous hâtiez de prendre possession de ce qui vous appartient, en faisant paraître votre Ouvrage le plus tôt qu'il vous sera possible.

La question de la n-section des fonctions elliptiques, abstraction faite des formules de solution dont vous avez fait la découverte, se réduit pour moi aux deux équations du degré n que fournissent les deux théorèmes de transformation, et, de plus, aux équations nécessaires pour diviser en n parties égales les deux fonctions complètes $F^1 k$, $F^1 h'$, où je désigne par h le module qui suit k, dans

l'échelle rapportée au nombre n. Ces dernières équations, pour déterminer les fonctions trigonométriques des amplitudes α_m, β_m, sont un objet que vous ne me paraissez pas encore avoir traité d'une manière satisfaisante, ni vous, ni M. Abel; cependant elles fournissent les constantes qui entrent dans les coefficients de vos équations, et, par suite, dans les résultats définitifs. Comment donc trouve-t-on les constantes? Vous avez annoncé que, pour passer du module donné k au module transformé h, il faut résoudre ce que vous appelez l'équation des modules, que vous dites être du degré $n+1$, et dont vous avez même donné les racines. Mais cette assertion ne me semble pas encore établie d'une manière tout à fait rigoureuse, et il reste toujours à trouver quel est le degré des équations à résoudre pour déterminer les constantes dont j'ai parlé. Pour la valeur particulière $n=5$, les constantes dont il s'agit se déduisent simplement de la valeur de h, sans exiger la résolution d'aucune équation composée; mais il n'en est pas probablement de même dans tous les cas, et vous m'obligeriez beaucoup, Monsieur, de me dire ce que vous savez, au moins en partie, sur la solution de cette difficulté. Vous l'avez résolue sûrement, sans quoi votre formule générale de solution contiendrait des coefficients que vous ne pourriez déterminer.

Je répéterai volontiers que cette formule, telle que vous l'annoncez, est la plus belle chose que je connaisse dans l'Analyse. M. Abel en avait annoncé une semblable de son côté; mais sa formule est représentée d'une manière bien vague; elle n'existe en quelque sorte qu'idéalement, tandis que vous lui avez donné une existence réelle et palpable, dans tout son développement.

En admirant ces belles formules de solution dites *algébriques*, c'est-à-dire composées de radicaux du degré n, imposés sur des quantités en partie réelles et en partie imaginaires, les savants reconnaîtront que vous avez beaucoup généralisé les solutions analogues qu'ont données Gauss et Vandermonde des équations à deux termes, ou plutôt des équations auxiliaires dont elles dépendent. — Nous conviendrons tous ensuite que ces formules, si belles en théorie, ne sont d'aucune utilité en pratique pour les solutions effectives. Car, indépendamment de la grande difficulté d'évaluer chaque radical en particulier du degré n, il se présente une autre difficulté à peu près insurmontable, qui est de savoir laquelle des

n valeurs de chaque radical devra être combinée avec les valeurs des autres. M. Gauss a laissé cette théorie fort imparfaite en ne donnant aucune réponse à cette question, qui deviendra bien plus difficile encore à résoudre pour vos $n^2 - 1$ radicaux.

L'espace ne me permet plus que de vous parler succinctement de deux choses. J'ai reçu de M. Abel une lettre fort intéressante, où il me parle d'une grande extension qu'il a donnée à ses recherches, en prouvant que des propriétés analogues à celles des fonctions elliptiques peuvent s'appliquer à des transcendantes beaucoup plus composées. C'est une grande généralisation de la belle intégrale d'Euler. On trouve un très-bel échantillon de ces nouvelles recherches dans le 4e cahier du *Journal de M. Crelle*, t. 3, p. 313. — En second lieu, il m'assure être en possession d'une méthode par laquelle il peut résoudre *algébriquement* toute équation donnée qui satisfait aux conditions nécessaires pour être ainsi résolue. Il s'ensuit que la solution générale est impossible passé le quatrième degré.

Adieu, Monsieur, recevez l'assurance de mon très-sincère attachement.

LEGENDRE.

Jacobi à Legendre.

Königsberg, le 14 mars 1829.

MONSIEUR,

Je vous remercie mille fois de votre lettre du 9 février, et, comme vous m'y proposez diverses questions, je veux chercher à y répondre. Vous supposez que j'ai trouvé des moyens à exprimer algébriquement les fonctions trigonométriques des amplitudes que vous désignez par α_m, en ajoutant que sans cela ma formule contiendrait des coefficients que je ne pourrai déterminer. Mais, Monsieur, ce que vous désirez est une chose *tout à fait impossible* dans le cas général, et qui ne s'exécute que pour des valeurs spéciales du module.

Ma formule, qui donne l'expression algébrique de sin am (u) au moyen de sin am (nu), suppose connue la section de la fonction

entière. C'est ainsi qu'on savait résoudre algébriquement depuis plus d'un siècle les équations qui se rapportent à la division d'un arc de cercle, toutefois en supposant connue celle de la circonférence entière, cette dernière n'étant donnée généralement que dans ces derniers temps par les travaux de M. Gauss.

M. Abel a traité, dans son premier *Mémoire sur les fonctions elliptiques*, le problème en question pour la première fois d'une manière générale; il a montré qu'il est toujours possible de réduire la division de la fonction indéfinie à celle de la fonction entière; ensuite il a montré que l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, de laquelle dépend cette dernière, se réduit à une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ dont les coefficients dépendent d'une autre équation du degré $n+1$, n étant premier. En effet, l'équation du degré n^2 entre $\sin\operatorname{am}(u)$ et $\sin\operatorname{am}(nu)$ a pour racines les n^2 expressions contenues sous la forme $\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{2mK+2im'K'}{n}\right)$, où l'on donne à m, m' les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

En supposant $u=0$, une racine devenant $\sin\operatorname{am}(u)=0$ et les autres devenant égales deux à deux, mais de signes opposés, l'expression $\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2mK+2im'K'}{n}\right)$ ne dépend plus que d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, comme vous l'avez montré par des exemples dans vos Traités.

Supposons n premier, et soit $\frac{mK+m'iK'}{n}=\omega$; on prouve aisément qu'une fonction symétrique quelconque de $\sin^2\operatorname{am}(2\omega)$, $\sin^2\operatorname{am}(4\omega)$, ..., $\sin^2\operatorname{am}[(n-1)\omega]$, par exemple celle-ci :

$$\sin^4\operatorname{coam}2\omega.\sin^4\operatorname{coam}4\omega\ldots\sin^4\operatorname{coam}(n-1)\omega\left(=\frac{\lambda}{\varkappa^n}\right),$$

ne peut obtenir plus que $n+1$ valeurs différentes, en mettant pour $\sin^2\operatorname{am}(2\omega)$ une quelconque des racines de l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$. Ces valeurs différentes répondent aux valeurs de $\omega=K$, iK', $K+iK'$, $2K+iK'$, ..., $(n-1)K+iK'$. En effet, toutes les racines de l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$ étant contenues sous la forme

$\sin^2 \operatorname{am}(2p\omega)$, où l'on donne à p les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, à ω les $n+1$ valeurs mentionnées, et le système des quantités $\sin^2 \operatorname{am} 2\omega$, $\sin^2 \operatorname{am} 4\omega, \ldots, \sin^2 \operatorname{am}(n-1)\omega$ pouvant être remplacé par le système de celles-ci :

$$\sin^2 \operatorname{am}(2p\omega), \sin^2 \operatorname{am}(4p\omega), \ldots, \sin^2 \operatorname{am}[(n-1)p\omega],$$

il suit que les fonctions symétriques de ces quantités ne sauront obtenir que les $n+1$ valeurs que l'on obtient en mettant pour ω des valeurs différentes et *incommensurables* entre elles. Donc elles dépendent d'une équation algébrique du degré $n+1$. C'est donc aussi le degré de l'équation dont les racines sont les différents modules transformés, attachés au nombre n supposé premier, et que j'appelle *æquatio modularis,* ces modules étant contenus sous la forme

$$\lambda = \varkappa^n [\sin \operatorname{coam} 2\omega \sin \operatorname{coam} 4\omega \ldots \sin \operatorname{coam}(n-1)\omega]^4.$$

Vous voyez donc, Monsieur, que M. Abel a prouvé ce théorème important, comme vous le nommez, dans son premier *Mémoire sur les fonctions elliptiques,* quoiqu'il n'y ait pas traité de la transformation, et qu'il ne paraît pas même avoir songé, du temps qu'il le composa, que ses formules et ses théorèmes trouveront une pareille application. Quant à moi, je n'ai pas trouvé nécessaire de reproduire cette démonstration dans les écrits que j'ai publiés jusqu'ici sur cette matière ; car il me reste trop à faire pour ne pas épargner mon temps le plus que possible.

Mais peut-être, Monsieur, vous aurez à faire des objections à cette démonstration. Dans ce cas, vous m'obligerez de beaucoup en me les communiquant ; car, lorsque je traiterai de mes théories nouvelles, il faudra en parler.

Étant connue une seule des fonctions symétriques de

$$\sin^2 \operatorname{am}(2\omega), \ldots,$$

la théorie générale des équations algébriques nous apprend, et M. Abel l'a remarqué, qu'il est possible d'exprimer par celle-ci toute autre fonction symétrique des mêmes quantités. C'est la cause de ce que vous avez pu exprimer rationnellement en

fonction des deux modules les coefficients des transformations attachées aux nombres 3 et 5, et il en sera de même pour tout autre nombre. Vous trouverez même dans le 2e cahier du volume IV du *Journal de M. Crelle* une formule à différences partielles très-remarquable qui sert à exprimer *généralement* ces coefficients par les deux modules, en supposant connue l'équation aux modules ; de sorte que la formation algébrique des substitutions à faire pour parvenir à une transformation quelconque est entièrement réduite à la recherche des équations aux modules, formule qui donne en même temps, comme cas spécial, les expressions algébriques et générales pour la multiplication par un nombre n quelconque *indéfini* : chose très-difficile, et dont vous avez dû remarquer les premiers exemples dans le 4e cahier du volume III dudit Recueil. Il sera de même si l'on fait tout dépendre de l'équation dont les racines donnent les valeurs de ce que vous appelez le *régulateur*, et cela conviendra peut-être encore mieux, ces dernières semblant être plus simples. Aussi j'ai découvert une propriété tout à fait singulière de ces équations, dont les racines sont les régulateurs, comme vous l'aurez lu dans le 3e cahier du volume III : c'est qu'on peut exprimer linéairement leurs *racines carrées* au moyen de la moitié de leur nombre, propriété qui m'est d'autant plus remarquable que je ne l'ai trouvée que par les développements en séries qui me sont propres, et que je ne vois pas comment on peut la prouver en quantités finies, ce qui pourtant doit être possible. Cette propriété servira sans doute à approfondir un jour la vraie nature de ces équations du degré $n+1$.

J'ai été convaincu, et M. Abel l'a confirmé, qu'il n'est pas possible de résoudre algébriquement ces équations du degré $n+1$; aussi, comme M. Abel sait établir des critères nécessaires et suffisants pour qu'une équation algébrique peut être résolue, il pourra sans doute prouver cela avec toute la rigueur analytique. Quant aux cas spéciaux, comme M. Abel a promis en plusieurs lieux d'en traiter, je ne me suis pas encore occupé beaucoup de cet objet, sans doute très-intéressant. Je ne veux ni reproduire ni prévenir les travaux de M. Abel : presque tout ce que j'ai publié dans ces derniers temps sur les fonctions elliptiques contient des vues nouvelles ; ce ne sont pas des amplifications des matières dont M. Abel a traité ou même promis de s'en occuper.

Le module transformé ou, ce qui revient au même, le régulateur qui y répond étant supposé connu, il faut encore résoudre une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ pour parvenir aux quantités $\sin^2 \operatorname{am}(2p\omega)$, ou à la section de la fonction entière. Donc vous n'aviez eu qu'à résoudre une équation du second degré dans le cas de $n = 5$. M. Abel a prouvé que la méthode de M. Gauss s'applique presque mot à mot à la résolution de ces équations, de sorte que ce ne sont que les équations aux modules qu'on ne sait pas résoudre algébriquement. J'ai trouvé le théorème remarquable, et je l'ai annoncé dans le 2e cahier du volume IV du Journal mentionné, qu'étant supposées connues *toutes les racines* de l'équation aux modules, ou tous les régulateurs qui répondent au nombre n, on peut exprimer les quantités $\sin \alpha_m$ *sans avoir besoin de résoudre encore aucune équation algébrique*. La méthode de M. Abel ne suppose connu qu'un seul module transformé pour trouver, par la résolution d'une équation algébrique du $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ième}}$ degré, les quantités $\sin \alpha_m$ qui répondent à ce module ; la connaissance de *tous* les modules transformés remplacera donc la résolution de cette équation.

Je ne crois pas que la formule que j'ai eu l'honneur de vous communiquer dans ma dernière Lettre perde à vos yeux, à présent où vous voyez qu'elle contient des coefficients que je ne sais pas déterminer, mais en même temps qu'il est impossible de les déterminer algébriquement.

L'impression de mon Ouvrage s'est retardée, puisqu'il s'imprime à 200 lieues de Königsberg ; sans cela, il serait déjà dans vos mains ; cependant j'espère pouvoir vous le faire parvenir dans très-peu de temps. Il ne contiendra que les fondements de mes travaux ; je publierai le reste dans des Mémoires isolés, puisque cela paraît être plus conforme à vos vœux.

Quelle découverte de M. Abel que cette généralisation de l'intégrale d'Euler ! A-t-on jamais vu pareille chose ! Mais comment s'est-il fait que cette découverte, peut-être la plus importante de ce qu'a fait dans les Mathématiques le siècle dans lequel nous vivons, étant communiquée à votre Académie il y a deux ans, elle a pu échapper à l'attention de vous et de vos confrères ?

Vos lettres, Monsieur, font époque dans le cours de mes travaux.

Veuillez donc me daigner honorer bientôt d'une réponse, et, comme j'irai voir mes parents à Potsdam, je vous prie de l'adresser à cette ville. Je vous prie aussi de vouloir bien excuser mille inconvénients qui naissent de ce qu'il faut que j'écris dans une langue qui m'est étrangère.

Votre dévoué serviteur,

C.-G.-J. Jacobi.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 8 avril 1829.

Je vous remercie, Monsieur, de la peine que vous avez prise de répondre aux questions contenues dans ma Lettre précédente. Je vois maintenant plus clairement qu'auparavant comment vous êtes parvenus, M. Abel et vous, à démontrer que l'équation des modules doit être du degré $n+1$, et aussi pourquoi la division de la fonction complète en n parties, qui, en général, dépend d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, se réduit à deux équations, l'une du degré $n+1$, l'autre du degré $\frac{n-1}{2}$. La démonstration de ces belles propriétés est encore enveloppée de quelques nuages, qui, j'espère, pourront se dissiper par un travail ultérieur, et avec le secours de ce que vous publierez sur cette matière; car votre manière d'écrire est plus claire pour moi que celle de M. Abel, qui, en général, ne me parait pas suffisamment développée et laisse au lecteur beaucoup de difficultés à résoudre.

Je viens de recevoir le nouveau cahier du *Journal de M. Crelle* où il y a trois beaux Mémoires de M. Abel et un précis que vous m'aviez annoncé de vos nouvelles recherches. Vous allez si vite, Messieurs, dans toutes ces belles spéculations, qu'il est presque impossible de vous suivre; surtout pour un vieillard qui a déjà passé l'âge où est mort Euler, âge où l'on a nombre d'infirmités à combattre, et où l'esprit n'est plus capable de cette contention qui peut vaincre des difficultés et se plier à des idées nouvelles. Je me félicite néanmoins d'avoir vécu assez longtemps pour être témoin

de ces luttes généreuses entre deux jeunes athlètes également vigoureux, qui font tourner leurs efforts au profit de la Science, dont ils reculent de plus en plus les limites. Ce spectacle m'intéresse d'autant plus qu'il m'offre les moyens de perfectionner mon propre Ouvrage, en profitant de quelques-uns des matériaux précieux qui sont le résultat de leurs savantes recherches.

Je finirai dans quelques jours l'impression de mon second Supplément, dont j'adresserai un exemplaire à Königsberg, pensant que vous y serez de retour à cette époque. Il est composé de presque toutes choses qui vous appartiennent, et qui m'ont cependant coûté beaucoup de travail, à cause des démonstrations que vous n'aviez pas toujours indiquées. Ce Supplément complète en quelque sorte la théorie des approximations, qui est l'un des objets principaux de mon Ouvrage; car, une fois les fonctions elliptiques connues, il faut faciliter par tous les moyens possibles leur application, c'est-à-dire la détermination numérique des fonctions. Je trouve que vous avez fait un grand pas dans cette carrière en réduisant les fonctions de la troisième espèce *à paramètre logarithmique* (j'appelle ainsi les fonctions dont le paramètre est $-\varkappa^2 \sin^2 \alpha$) de sorte qu'elles ne dépendent plus que de deux variables, et qu'ainsi on puisse les évaluer en joignant aux Tables connues une nouvelle Table à double entrée seulement. J'aurais bien voulu que la même propriété pût être étendue aux autres fonctions de la troisième espèce, c'est-à-dire à celles que j'appelle *à paramètre circulaire*, ou dont les paramètres sont des formes $\cot^2 \alpha$, $\varkappa'^2 \tang^2 \alpha$, et $-1 + \varkappa'^2 \sin^2 \alpha$; mais les efforts que j'ai faits pour parvenir à ce résultat ont été infructueux, quoique vous en ayez annoncé la possibilité. Je serais très-aise de m'être trompé, et je réparerais avec grand plaisir mon erreur si vous m'indiquiez le moyen de résoudre la difficulté et d'exprimer par deux variables seulement cette seconde division des fonctions de troisième espèce. Ce serait, à mon avis, la plus grande découverte qu'il est possible d'espérer dans la théorie des fonctions elliptiques, puisqu'elle rendrait l'usage de ces fonctions presque aussi facile, dans tous les cas, que celui des fonctions circulaires et logarithmiques. S'il faut perdre tout espoir à cet égard, j'aurai au moins la consolation que mes recherches sur votre découverte m'ont fourni l'occasion de perfectionner assez notablement le calcul approximatif des fonctions à paramètre circu-

laire, au moyen de mes arcs Ω et Ω', dont l'un au moins se détermine toujours par deux suites fort convergentes.

Je ne terminerai pas cette Lettre sans répondre à l'article de la vôtre qui concerne le beau Mémoire de M. Abel qui a été imprimé dans le cahier précédent du *Journal de Crelle,* et qui avait été présenté à l'Académie par son auteur dans les derniers mois de 1826. M. Poisson était alors président de l'Académie; les commissaires nommés pour examiner le Mémoire furent M. Cauchy et moi. Nous nous aperçûmes que le Mémoire n'était presque pas lisible : il était écrit en encre très-blanche, les caractères mal formés; il fut convenu entre nous qu'on demanderait à l'auteur une copie plus nette et plus facile à lire. Les choses en sont restées là; M. Cauchy a gardé le manuscrit jusqu'ici sans s'en occuper; l'auteur, M. Abel, paraît s'en être allé sans s'occuper de ce que devenait son Mémoire; il n'a pas fourni de copie, et il n'a pas été fait de Rapport. Cependant j'ai demandé à M. Cauchy qu'il me remette le manuscrit qui n'a jamais été entre mes mains, et je verrai ce qu'il y a à faire pour réparer, s'il est possible, le peu d'attention qu'il a donné à une production qui méritait sans doute un meilleur sort.

Votre tout dévoué,

LEGENDRE.

Jacobi à Legendre.

Potsdam, le 28 mai 1829.

MONSIEUR,

Je vous rends grâce de votre lettre du 8 avril qui me demande la publication d'un Supplément, que j'attends avec une grande impatience. Vos deux Suppléments embrasseront sans doute la plupart de ce qui se trouvera de nouveau et d'intéressant dans mon Ouvrage et beaucoup d'autres choses qui ne s'y trouvent pas. L'impression de celui-ci étant achevée, je me suis empressé de vous le faire parvenir, et je vous prie de l'accueillir avec cette bonté dont vous m'avez donné des preuves si éclatantes. Cependant je crains qu'il ne soit beaucoup au-dessous de la bonne opinion que vous avez voulu concevoir de mes travaux, et je crains cela d'autant plus,

puisqu'il ne contient que les fondements de mes recherches et qu'il me faut encore une longue série de travaux pour établir aux yeux des géomètres leur ensemble.

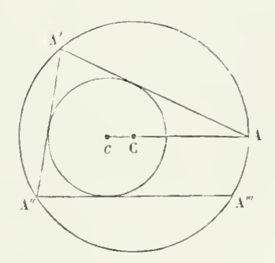
En ce qui regarde les intégrales elliptiques de la troisième espèce à paramètre circulaire, vous avez complétement raison : elles ne jouissent pas d'une réduction analogue à celle de l'autre espèce logarithmique. Si j'ai annoncé une pareille chose, comme vous le dites dans votre lettre, cela n'a pu être que dans le sens général et analytique, où l'on ne distingue pas entre les valeurs réelles et imaginaires, et qu'on fait abstraction de l'évaluation numérique. Sous ce point de vue, une même formule embrasse tous les cas, de sorte qu'on n'a pas besoin de distinguer entre les espèces, ce qui devient nécessaire aussitôt qu'on veut appliquer les formules qui s'y rapportent au calcul numérique ou qu'on ne veut considérer que des quantités réelles. Toutefois cette sorte d'inconvénient, qui tient à la nature intime de l'objet, et nullement à un défaut de notre part, me paraît ajouter du mérite à votre division des intégrales elliptiques de la troisième espèce en deux classes, auxquelles se ramènent tous les autres cas. En effet, ces deux classes diffèrent essentiellement entre elles, le paramètre et l'amplitude dans l'une d'entre elles pouvant être réunis dans une seule variable, et l'autre pouvant être rapportée en même temps au module donné et à son complément. Je pourrais vous parler davantage sur cette matière, mais j'aime mieux voir auparavant votre second Supplément.

J'ai déjà communiqué à M. Crelle, pour le faire insérer dans son Journal, un premier Mémoire qui fait partie d'une suite de Mémoires dans lesquels je veux exposer, avec les démonstrations et les développements nécessaires, les différents résultats auxquels je suis parvenu, et dont j'ai déjà annoncé la plupart sans démonstration. Vous y trouverez les formules générales qui se rapportent à la transformation des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce, présentées sous une forme commode et élégante. Vous y trouverez aussi les formules générales qui donnent leurs valeurs dans le cas que $F(\varphi)$ est commensurable avec la fonction entière F^1, ou plus généralement $= \frac{mF^1(z) + nF^1(z')\sqrt{-1}}{p}$, m, n, p étant des nombres entiers. Mais le but principal de ce premier Mémoire est de préparer tout ce qui est nécessaire pour que je

puisse établir dans les Mémoires suivants, avec toute la rigueur nécessaire et en partant des premiers éléments, cette théorie des transformations irrationnelles ou inverses et de la section des fonctions elliptiques, qui me paraît être le comble de toutes mes recherches sur cette matière.

Dans un Mémoire écrit en allemand, et qui a été inséré dans le troisième volume du *Journal de M. Crelle,* j'ai donné une construction *plane* de la multiplication des fonctions elliptiques.

Soit A A′ A″ A‴... une partie d'un polygone inscrit au cercle C et circonscrit au cercle c, A étant situé dans le prolongement de Cc



ou de la droite qui joint les deux centres : si l'on met $AA' = 2\varphi_1$, $AA'' = 2\varphi_2$, $AA''' = 2\varphi_3$, ..., on aura

$$F(\varphi_2) = 2F(\varphi_1), \quad F(\varphi_3) = 3F(\varphi_1), \quad \ldots.$$

Le module se détermine par la distance du centre C à la sécante idéale commune aux deux cercles. Donc si l'on veut trouver un angle φ_n, tel que $F(\varphi_n) = nF(\varphi)$, on n'a qu'à décrire un cercle c, qui touche la droite AA′ et qui a une sécante idéale donnée commune avec le cercle C ; ensuite on mène au cercle c les tangentes A′A″, A″A‴, A‴A^{IV}, ..., les points A″, A‴, A^{IV}, ... étant situés tous dans la périphérie du cercle C ; la $n^{\text{ième}}$ tangente étant $A^{(n-1)}A^{(n)}$, on aura $AA_n = 2\varphi_n$. Les arcs de cercle peuvent devenir plus grands que 360 degrés, de sorte que cette construction n'a point de limites, comme celle de Lagrange. On voit ainsi que la théorie générale des polygones inscriptibles et circonscriptibles en même temps à un cercle dépend des fonctions elliptiques, comme celle des polygones réguliers des fonctions circulaires.

Pardonnez-moi si j'ose vous faire remarquer qu'il me semble que,

dans votre premier Supplément, vous avez présenté d'une manière incomplète ma démonstration de mon premier théorème. Il me semble que de la seule circonstance que y se change en $\frac{1}{\lambda y}$, x étant changé en $\frac{1}{\varkappa x}$, vous concluez que la valeur de y, qu'on a supposée, satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

puisqu'on peut faire dans celle-ci cette substitution.

Mais je n'ai pas fait, moi, cette conclusion, que vous reconnaîtrez aisément être fautive, puisqu'on peut former *ad libitum* des expressions qui jouissent de cette propriété et qui ne satisfont pas à l'équation différentielle.

Vous m'obligerez beaucoup, Monsieur, si vous voulez avoir la bonté de faire parvenir à MM. Poisson, Fourier et Cauchy les exemplaires de mon Ouvrage, qui se trouvent auprès de celui dont je vous fais hommage. Comme je resterai encore quelque temps à Potsdam, je vous prie d'y adresser une réponse, que j'attends avec une vive impatience.

Votre entièrement dévoué,

C.-G.-J. Jacobi.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 4 juin 1829.

Monsieur,

Je suis fort empressé de recevoir l'exemplaire que vous m'avez destiné de votre Ouvrage, contenant le fondement de vos recherches sur la théorie des fonctions elliptiques. Je distribuerai conformément à vos intentions les trois exemplaires qui y sont joints, aussitôt que je les aurai reçus; je regrette seulement que vous n'en ayez pas envoyé un quatrième pour l'Académie avec une lettre au Président, et je vous engage à réparer cette omission aussitôt la présente reçue, que je m'empresse à cet effet de vous adresser à

Potsdam, puisque vous me marquez que vous y resterez encore quelque temps. — Je ne serai pas moins empressé de voir le Mémoire qui doit paraître dans le Recueil de M. Crelle, et qui sera suivi de plusieurs autres où vous donnerez, dites-vous, les démonstrations détaillées de plusieurs de vos beaux résultats. —Je vous ai adressé mon second Supplément à Königsberg, pensant que vous ne resteriez pas si longtemps à Potsdam. — Je vois à l'avance que nous serons d'accord sur les deux classes des fonctions de troisième espèce que je distingue par les noms de *logarithmique* et de *circulaire;* je suis fâché de perdre l'espérance de réduire en Table les fonctions à paramètre circulaire, et j'ai peine à comprendre comment il peut y avoir une différence aussi essentielle entre les deux classes; *mais, comme vous dites, cela tient à la nature des choses, et nous ne pouvons rien y changer.* Vous vous en consolez plus aisément que moi, vous et M. Abel qui êtes tous deux éminemment spéculatifs, mais moi qui ai toujours eu pour but d'introduire dans le calcul de nouveaux éléments qu'on puisse réaliser en nombres à volonté, moi qui me suis livré à un travail des plus longs et des plus fastidieux pour la construction des Tables, travail que je n'hésite pas à croire aussi considérable que celui des grandes Tables de Briggs, je ne prends pas mon parti aussi facilement sur l'espérance déçue que vous m'aviez fait concevoir, et dont une moitié seulement s'est réalisée.

Votre construction géométrique des fonctions multiples me paraît fort ingénieuse ; ce sont de ces choses dont je ne manquerai pas de faire mention dans un troisième Supplément, s'il y a lieu ; car je ne réponds de rien : j'ai eu encore bien de la peine à passer cet hiver, et une année de plus devient pour moi un demi-siècle. Vous avez déjà une preuve de l'influence de l'âge qui diminue nécessairement l'étendue de nos facultés intellectuelles, puisque vous avez remarqué que je n'ai pas bien saisi votre pensée, et que j'ai présenté d'une manière incomplète dans mon premier Supplément la démonstration de votre théorème I. Vous aurez peut-être occasion de faire de semblables remarques dans la lecture du second Supplément, mais vous remarquerez du moins en même temps que les erreurs dans lesquelles j'aurais pu tomber ne peuvent être reprochées qu'à moi, et que je n'ai rien négligé pour que la gloire de vos découvertes vous soit réservée tout entière.

Relativement au premier objet, je dois dire, pour mon excuse, que votre démonstration, telle que vous l'avez donnée dans le *Journal de M. Schumacher*, ne m'a paru concluante qu'en admettant comme *assomption* ce que j'appelle *le principe de la double substitution*, dont l'idée m'a paru très-heureuse et de nature à faire beaucoup d'honneur à votre sagacité.

J'ai dit expressément que la double substitution qui satisfait à l'équation différentielle doit satisfaire aussi à son intégrale, et, partant de là, je suis arrivé à votre résultat. Cette raison m'a paru suffisante; d'ailleurs je n'ai point vu que vous ayez motivé sur des raisons plus solides l'usage que vous avez fait de ce principe. Il ne m'avait pas cependant échappé qu'on pouvait faire des objections contre ce principe; j'avais remarqué que, si la valeur $y = \frac{x}{\mu}\frac{U}{V}$ satisfait au principe, une valeur différente, telle que

$$y = \frac{x}{\mu}\frac{U}{V}\left(\frac{1}{\varkappa x} + x\right)\left(\frac{1}{\varkappa x} - x\right),$$

y satisfait encore sans satisfaire à l'équation différentielle; j'avais remarqué encore que, pour l'échelle ancienne, dont l'indice est 2 (pag. 36 et 38 du premier Supplément), l'équation des amplitudes pour le théorème I, savoir $y = \frac{(1+\varkappa')x\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}}$, satisfait bien au principe de la double substitution, mais que l'équation analogue du théorème II, savoir $z = \frac{1+\lambda}{\lambda y + \frac{1}{y}}$, n'y satisfait pas. J'ai maintenant l'espoir que, dans le Mémoire qui va bientôt me parvenir dans le *Journal de M. Crelle*, je trouverai les développements nécessaires sur cet objet avec lesquels je pourrai corriger dans mon prochain Supplément ce que le premier contient de défectueux.

Recevez, Monsieur, mes compliments et l'assurance de mon sincère attachement.

LEGENDRE.

En fermant cette lettre, je viens d'apprendre, avec une profonde douleur, que votre digne émule, M. Abel, est mort à Christiania, des suites d'une maladie de poitrine, dont il était affecté depuis quelque temps, et qui a été aggravée par les rigueurs de l'hiver.

C'est une perte qui sera vivement sentie de tous ceux qui s'intéressent aux progrès de l'Analyse mathématique, considérée dans ce qu'elle a de plus élevé. Au reste, dans le court espace de temps qu'il a vécu, il a élevé un monument qui suffira pour rendre sa mémoire durable et donner une idée de ce qu'on aurait pu attendre de son génie, *ni fata obstetissent.*

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Kirchhoff (G.), Professor an der Universität zu Heidelberg. — Vorlesungen über mathematische Physik Mechanik. Erste Lieferung, 124 p. Zweite Lieferung, 182 p. In-8°, 1874. — Leipzig, Teubner. 12 fr.

Nous rendrons compte prochainement des deux livraisons de cet important Ouvrage, qui se distingue tout à fait de nos Traités de Physique mathématique et dont l'exécution répond tout à fait à la haute réputation de l'auteur.

Magnus de Sparre, capitaine au 16e d'artillerie. — Sur la détermination géométrique de quelques infiniment petits. In-8°. — Paris, Gauthier-Villars, 1875. (Extrait du *Bulletin de la Société Statistique de l'Isère.*) 1 fr. 50 c.

Dans cet Opuscule l'auteur s'occupe des courbes gauches et détermine les ordres de différents infiniment petits : plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines, distance d'un point à la sphère osculatrice infiniment voisine, etc. Il considère sous le nom de *troisième courbure* la limite du rapport de l'angle sous lequel se coupent deux sphères osculatrices infiniment voisines à l'arc de courbe correspondant.

Bianco (Ottavio Zanolli). — Sulla livellazione barometrica. Dissertazione presentata alla Commissione esaminatrice della R. Scuola d'applicazione per gl' Ingegneri in Torino, per ottenere il Diploma di Laurea di Ingegnere civile. In-8°. — Milano, C. Molinari.

Favaro (A.). — Sulla ipotesi geometrica nel Menone di Platone. In-4°. — Padova, tipografia del Seminario, 1875.

Lewin (J.), Director der Budapester Handelsakademie. — Aphoris-

tische Bemerkungen zur politischen Arithmetik. I. Abtheilung. Budapestpesler Buchdruckerei-Action-Gesellschaft. In-8°, 1875.

MANSION. — Notice sur la vie et les travaux de R.-A. Clebsch. Gr. in-8°. (Extrait du *Bullettino di Bibliografia*, 1875.)

Cette Notice contient un Catalogue des travaux de l'illustre savant qui se distingue par plusieurs additions de celui qui a été publié dans les *Mathematische Annalen*. Les personnes qui ont formé de tels Catalogues savent combien il est difficile d'être complet. C'est ainsi que la liste des œuvres de Plana, qui se trouve à la fin de l'éloge d'Élie de Beaumont et qui a été fournie par la famille de Plana, pouvait paraître présenter toutes les garanties, et cependant nous avons eu à faire des additions considérables avant de la publier. Le nouveau Catalogue de M. Mansion indique aussi quelques travaux de Clebsch oubliés dans la précédente liste. Il se compose de 180 numéros. Les Mémoires indiqués aux numéros 7, 68, 70, 86, 93 sont signalés pour la première fois. Enfin les *Recensions* (*referate*) indiquées dans le Catalogue nouveau sous les numéros 107-177 ne sont que signalées d'une manière générale dans celui des *Mathematische Annalen*.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CHASLES (M.). — Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne, suivi d'un Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la Science, la Dualité et l'Homographie. Seconde édition, conforme à la première. — Paris, Gauthier-Villars, 1875. In-4°; pr. : 35 fr.

L'*Aperçu historique,* tiré à un petit nombre d'exemplaires, était devenu d'une extrême rareté. Dans une de nos analyses, nous faisions remarquer qu'un savant anglais des plus distingués déclarait n'avoir jamais vu ce « rare et précieux » Livre. Dès à présent, il est mis, avec l'autorisation de son illustre auteur, à la portée de tous, et c'est là un service considérable rendu aux études et à la Science. La seconde édition est absolument conforme à la première pour le texte; elle s'en distingue seulement par un *Avertissement* de M. Chasles, que nous reproduisons plus loin. L'*Aperçu historique* a, dans toutes ses parties, le caractère d'un document très-important pour l'histoire de la Géométrie. Il importait donc de le remettre sans modification entre les mains des géomètres. C'est cette heureuse pensée qui a inspiré la publication actuelle, sur l'importance de laquelle il est inutile d'insister. G. D.

« Cet Ouvrage a été conçu à l'occasion d'une question proposée par l'Académie de Bruxelles. Il se réduisait alors aux deux Mémoires qui le terminent, adressés à l'Académie en décembre 1829, et précédés d'une simple Introduction très-restreinte. Lorsque l'Académie eut ordonné l'impression de ce travail, je me proposai d'en étendre l'Introduction, et d'y joindre même, sous le titre de Notes, quelques résultats de recherches qui rentraient dans le sujet. Mais je différai d'abord de donner suite à ce projet; puis les recherches historiques proprement dites, où se présentaient certaines questions obscures que je n'avais pas prévues, retardèrent l'envoi du manuscrit, que l'Académie et l'insistance amicale de son illustre et bien regretté Secrétaire perpétuel, M. Ad. Quetelet, me faisaient un devoir de terminer. L'impression commença en 1835, d'abord sans entraves, et assez rapidement, mais fut bientôt ralentie, particulièrement par l'étude des Ouvrages indous de Brah-

megupta, dont on n'avait pas encore signalé le sujet réel et l'importance spéciale pour la partie géométrique. Enfin le volume parut en 1837.

» L'Académie, dans ces derniers temps, a eu la pensée de le reproduire. Ma santé et divers travaux arriérés, dont je retiens même les épreuves depuis des années, ne me permettaient pas de prendre part à cette réimpression; mais mon ami, M. Catalan, professeur à l'Université de Liége, a eu la bonté de me suppléer dans la révision des épreuves. Je le prie d'en agréer ici mes bien affectueux remercîments.

» Une autre objection pouvait se présenter. Depuis 1837, la Géométrie a fait des progrès considérables, qui ont été le sujet d'un des Rapports entrepris sous le ministère et sur la demande de l'honorable M. Duruy. Cette circonstance pouvait rendre fort douteuse l'opportunité d'un travail déjà ancien de près d'une quarantaine d'années. Cependant M. Hayez, imprimeur de l'Académie de Belgique, et M. Gauthier-Villars, qu'il a désiré s'associer, ont bien voulu accomplir la pensée de l'Académie. Qu'ils veuillent bien aussi en agréer mes remercîments. »

DÜHRING (E.). — Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. — Berlin, Th. Grieben, 1873. — 1 vol. in-8, xxxi-513 p.

KLEIN (H.). — Die Principien der Mechanik, historisch und kritisch dargestellt. — Leipzig, Teubner, 1872. — 1 vol. in-8, vii-120 p.

Ces deux Livres, consacrés à une même étude, ont été inspirés l'un et l'autre par l'Université de Gœttingue. La savante Compagnie avait proposé pour sujet de prix la vaste question qui y est traitée. Deux récompenses pouvaient être décernées : M. Dühring a été jugé digne de la première; la seconde a été accordée, avec une approbation très-honorable, au travail de M. Klein.

Celui qui, connaissant ou croyant connaître les principes définitifs d'une science, veut étudier l'histoire des doctrines devenues pour lui indiscutables, peut, suivant la nature de son esprit, aborder les grands génies qui l'ont créée, avec les dispositions d'un

juge empressé à louer ce qui est irréprochable, mais prêt à signaler sans ménagement les défaillances et les erreurs; ou, plus modestement et plus utilement, je crois, comme un disciple désireux de puiser aux sources originales l'intelligence plus complète et plus large à la fois des théories devenues classiques et la connaissance plus précise de la langue scientifique qui a prévalu. Le plus brillant élève de nos écoles, capable de répondre exactement et sans hésiter sur tous les Chapitres de la dernière édition d'un Traité de Mécanique recommandé à la fois aux étudiants de Paris, de Cambridge et de Gœttingue, comprendra aisément Galilée, Huyghens et Newton; mais, en y rencontrant, avec étonnement peut-être, des vérités et des idées pour lui entièrement neuves, des démonstrations d'une simplicité inattendue, il demandera pourquoi certains développements simples et lumineux n'ont pas eu la fortune de devenir classiques; on lui répondra peut-être qu'un Traité complet ressemble à une grande route dont le rôle est de conduire au but directement et aisément, autant que possible, et que l'ingénieur qui la trace considère la beauté des sites et la facilité d'apercevoir les traits distinctifs de la contrée comme des conditions absolument secondaires.

M. Dühring a adopté le rôle de juge parfois très-sévère, disposé à condamner chez les créateurs de la Science tout ce que les progrès ultérieurs n'ont pas rendu définitif. Riche des découvertes accumulées depuis trois siècles, et supérieur par le savoir aux plus grands génies du passé, il ne croit plus avoir à leur demander de leçons. Il en résulte, dans son Ouvrage très-développé, une sécheresse uniforme, qui, je dois l'avouer, après le Rapport publié depuis plusieurs années déjà par l'Académie de Gœttingue, a pu être pour beaucoup de lecteurs une déception.

« L'Ouvrage couronné », dit le rapporteur, « nous a donné, par les 586 pages d'écriture serrée qu'il contient, un travail un peu long, mais agréablement récompensé. La Table des matières promet une réponse détaillée à toutes les questions posées par la Faculté, et la lecture du Mémoire réalise cet espoir de la manière la plus heureuse. »

L'Ouvrage de M. Dühring prouve sans contredit le savoir étendu de l'auteur et la fermeté de son esprit; mais il est loin d'inspirer suffisamment le désir de lire les ouvrages, trop négligés, des créateurs

de la Science. L'impression générale qu'il laissera, au contraire, c'est que, dans l'état actuel de nos études et de nos méthodes, nous n'avons rien d'essentiel à y apprendre.

Archimède, cité le premier au tribunal du savant docteur de Berlin, y reçoit, pour toute louange, le jugement suivant :

« Pour les raisons que nous avons dites, nous n'exposerons avec détail les principes d'Archimède qu'au moment où, à l'entrée des temps modernes, ils auront acquis l'importance, et pour ainsi dire la vie, entre les mains des savants du XVIe siècle. Ce que le hasard nous a transmis de ses écrits ne pourrait être considéré d'abord que comme un *caput mortuum;* car, au lieu des méthodes de recherche, il ne nous montre qu'un échafaudage de propositions toutes prêtes, qui force l'assentiment sans porter l'évidence devant les yeux. Les modernes ont dû trouver les méthodes, et, quoique l'on ne puisse douter qu'Archimède et les anciens appliquaient à la recherche de la vérité certaines méthodes nouvelles qu'ils n'ont pas fait connaître, leur préoccupation principale a été, dans l'exposition, d'atteindre la rigueur d'une démonstration inattaquable. »

Galilée, dont les œuvres mécaniques sont longuement et exactement analysées, inspire à l'auteur plus d'admiration, et son grand rôle dans l'histoire de la Science n'est ni méconnu ni amoindri. Le passage suivant, néanmoins, indiquera, plus clairement encore peut-être que les lignes consacrées à Archimède, la préoccupation habituelle de M. Dühring en présence des chefs-d'œuvre de date ancienne :

« Des poids égaux ont des moments proportionnels à leurs vitesses, et le moment dépend, en général, du poids, de la position, et des autres circonstances qui produisent la tendance au mouvement, de sorte que toutes les circonstances de l'impulsion de la force motrice sont réunies dans l'idée de moment. Cette réunion d'éléments divers n'est nullement favorable à la simplicité que doit avoir une idée fondamentale. Cet inconvénient est beaucoup diminué chez Galilée par le soin qu'il apporte à séparer ces éléments, en n'opérant, par le fait, que sur des idées simples; aussi l'idée ne contient en réalité d'essentiel que la considération qui n'y est jamais absente, celle de vitesse, que celle-ci existe déjà, ou qu'ayant une valeur actuellement nulle on ait à prendre pour moment celle qui va être communiquée. Galilée s'exprime de manière

que la pesanteur seule est considérée comme moment, sans autre addition, tandis que nous sommes habitués à décomposer le moment en deux, et, si l'on veut, en trois facteurs, en le considérant comme le produit d'une simple masse sans pesanteur par l'accélération relative elle-même à un élément très-petit, mais arbitraire du temps (la seconde), et par un autre facteur élémentaire, qui indique la vitesse engendrée dans un temps donné quelconque. La formule $P = mg$, adoptée aujourd'hui, ne contient pas, il est vrai, l'élément infiniment petit du temps; mais cette circonstance est indifférente, car il est permis de multiplier les deux membres par dt. »

Les équations et les principes actuellement enseignés semblent, on le voit, former pour M. Dühring l'état parfait de la Science; c'est à eux qu'il faut comparer les créations et les études antérieures. Les idées de Galilée sur l'accélération sont-elles conformes aux méthodes d'exposition adoptées aujourd'hui à Gœttingue? Ses formules ont-elles les mêmes avantages que l'équation $P = mg$, connue de tous nos écoliers? Telle est la préoccupation de M. Dühring, à laquelle, pour ma part, j'aurais préféré le voir rester étranger.

Préoccupé de comparer les œuvres originales aux théories devenues classiques, M. Dühring devait se montrer très-sévère pour Descartes. Rien de plus aisé que la critique et la condamnation de ses écrits sur la Mécanique; les assertions inexactes peuvent y être relevées en grand nombre, et Descartes, toujours sûr de lui, les aggrave par le ton tranchant avec lequel il propose comme certain ce que nous savons inconciliable avec les principes les mieux démontrés. Un écolier qui prendrait aujourd'hui Descartes pour guide serait fort mal inspiré, et les examinateurs, tout d'une voix, le déclareraient étranger aux premiers principes de la Science. M. Dühring, par plusieurs citations, dont il aurait pu doubler et même décupler le nombre, le démontre sans difficulté; mais est-ce là tout? L'historien, par de telles critiques, a-t-il accompli sa tâche? Ne doit-il pas expliquer surtout comment à ces assertions fausses se mêlent des vérités grandes et fécondes, qui dominent aujourd'hui la Science et l'ont servie peut-être tout autant que les écrits irréprochablement immortels de Galilée et d'Huyghens? M. Dühring, il est juste de le dire, ne le méconnait pas; les idées de Descartes sur la conservation de la force sont appréciées avec

justice : on regrette seulement de rencontrer ce jugement à la fin du Chapitre, et comme atténuation des pages sévères qui le précèdent.

Les sévérités de M. Dühring sont impartiales, et l'un des plus grands génies de l'Allemagne semble précisément le plus maltraité de tous. Les *Actes* de Leipzig, de 1684, donnèrent, est-il dit dans le texte, la première publicité à la théorie des fluxions de Newton, et en note, on ajoute : « Il n'a pas été possible d'opposer à Leibnitz des preuves complètes qui le forçassent à avouer son emprunt ; mais la connaissance de son caractère donne à l'acte qu'on lui reproche une probabilité voisine de la certitude. Une lettre d'Huyghens à L'Hospital est sur ce point fort instructive.

« M. Leibnitz », dit Huyghens, « est assurement tres habile, » mais il a avec cela une envie immoderée de paroître, comme cela » se voit, lorsqu'il parle de son Analyse des infinis..., des loix » harmoniques des mouvemens planetaires, où il a suivi l'inven- » tion de M. Newton, mais en y meslant ses pensées qui la gastent.... » Encore suis-je fort en doute, pour des raisons que je pourrois » alleguer, s'il n'a pas tiré sa construction (de la chaînette) de » celle de M. Bernoulli. »

» Dans la préface de son *Calcul différentiel,* Euler n'attribue à Leibnitz que la réduction des principes de Newton en système. Lagrange, qui cherche chez Fermat l'origine du Calcul différentiel, ne manque pas, dans ses *Leçons sur le calcul des fonctions,* de signaler les concordances de l'écrit de Leibnitz, de 1684, avec la théorie antérieure de Fermat. Gauss pensait, comme on le voit dans l'écrit de Sartorius de Waltershausen, que Leibnitz, même de loin, ne doit pas être comparé à Newton. »

Dans l'exposé de la célèbre question des forces vives, nous retrouvons le même esprit de critique sévère jusqu'à la dureté, il est impossible de ne pas ajouter et à l'injustice.

« Leibnitz », dit M. Dühring, « a donné un nom nouveau à une idée déjà ancienne. La distinction qu'il fait entre la pression ou force morte et la force vive est seulement l'écho d'une pensée de Galilée. La remarque, d'ailleurs, sur la différence entre l'action d'un poids considérable qui agit par simple pression et celle d'un petit choc a été faite depuis l'antiquité et semble peu importante.

» La discussion sur la mesure des forces, qui s'est toujours

maintenue dans l'enveloppe métaphysique de la Science sans toucher aux relations et aux faits acquis par les travaux antérieurs de Huyghens et de Newton, s'explique par l'ignorance des disciples de Descartes, incapables d'apprécier les connaissances positives déjà acquises. C'était une occasion pour produire le semblant d'une critique déjà nouvelle de la philosophie cartésienne sur un point où Huyghens l'avait dépassée depuis longtemps. Ce grand penseur n'avait pas jugé utile de démontrer l'insuffisance, les erreurs et les équivoques des idées et du langage de Descartes. Leibnitz ne laissa pas échapper une telle occasion...... Descartes avait eu l'idée vague, mais accidentellement exacte, de mesurer la force ou quantité d'action en multipliant le poids par la hauteur; mais il s'était borné aux mouvements virtuels relatifs aux problèmes de Statique, et n'avait rien compris à la dynamique de Galilée. Leibnitz donna une forme nouvelle à l'idée de Descartes. »

On lit quelques pages plus loin : « La même inexactitude dont est entachée la métaphysique infinitésimale de Leibnitz a produit également un manque de rigueur et une équivoque dans les idées sur la conservation des vitesses, qui, sans avoir les mêmes conséquences que la fausse métaphysique du Calcul différentiel, a beaucoup contribué à rendre plus difficile l'expression des idées fondamentales de la Mécanique. »

Indiquons encore dans quel esprit le sévère lauréat de l'Académie de Gœttingue aborde l'étude du chef-d'œuvre de Newton :

« L'importance d'une application nouvelle et d'un nouveau champ d'études n'entraine aucun changement dans les principes, et il faut se garder de mesurer à la grandeur du sujet abordé celle des éléments réellement nouveaux apportés à la science mécanique. Les services de Newton dans le domaine que nous explorons ont été trop souvent exagérés..... »

M. Dühring résume rarement dans un jugement d'ensemble les pages consacrées aux hommes illustres dont il étudie les travaux. Il en résulte un manque de proportion regrettable dans l'importance relative qu'un lecteur, ignorant l'histoire générale de la Science, sera tenté d'accorder aux noms cités par l'auteur.

Ne vaudrait-il pas mieux passer le nom de Cauchy sous silence que de le citer seulement comme l'auteur d'une tentative de démonstration du parallélogramme des forces, que l'on déclare inac-

ceptable, et d'une simplification relative à un théorème d'Hydrostatique?

M. Dühring, on le voit, n'est pas porté aux louanges excessives. Poinsot semble seul, entre tous les géomètres cités, traité de manière à satisfaire sans réserve ses admirateurs. Nous n'avons pas à nous en plaindre, et les lecteurs du *Journal des Savants* peuvent savoir quel rang nous accordons à ce lumineux et profond esprit. N'est-ce pas cependant forcer un peu la note que de diviser l'histoire de la Mécanique au XIXe siècle en deux Chapitres seulement, dont l'un est consacré tout entier à Poinsot? Les travaux de Gauss, Jacobi, Hamilton, Dirichlet et *quelques autres* forment l'autre Chapitre. Cauchy, Poncelet et Coriolis figurent parmi ces *quelques autres*.

En approchant, d'ailleurs, il faut le dire, de la fin du Livre, la rédaction devient plus brève et plus hâtive. On a longuement disserté sur les Porismes d'Euclide, qui sont connus seulement par le jugement et l'analyse de Pappus; si le temps détruisait les œuvres de Jacobi et de Hamilton, une critique de l'avenir, en se servant de la seule analyse faite par M. Dühring, devrait renoncer, quelle que fût sa perspicacité, à deviner la nature et le but du progrès accompli par eux et le point de vue auquel se plaçaient les contemporains pour les égaler aux plus admirables chefs-d'œuvre.

Robert Mayer, de Heilbronn, a trouvé, comme Poinsot, chez M. Dühring, une admiration sans réserve. Le Chapitre consacré à la théorie mécanique de la chaleur en sera d'autant plus utile et agréable au lecteur. Plus d'une objection cependant peut être faite. L'omission du nom de Montgolfier et du savant héritier de ses conceptions, M. Séguin, serait inexplicable, si les réclamations de l'éminent auteur du Livre sur l'influence des chemins de fer étaient parvenues jusqu'à M. Dühring. Peut-être aussi peut-on dire que l'approbation donnée aux idées de M. Mayer va trop loin quand elle conduit l'auteur à blâmer ceux qui, refusant d'attacher au mot *force* le sens un peu vague adopté par lui, continuent à lui faire représenter exclusivement un effort mesurable en kilogrammes. Quant aux titres de Montgolfier et de son interprète, M. Séguin, nous nous bornerons à une citation prise dans l'Ouvrage intitulé : *De l'influence des chemins de fer et de l'art de les tracer et de les construire* (Paris, 1839), antérieur de trois ans au

moins à la première publication de Mayer. On lit (p. 420) : « Ce fut lui (Montgolfier) qui m'a communiqué, lorsque j'étais bien jeune encore, l'opinion bien arrêtée dans laquelle il était qu'il existe une véritable identité entre le calorique et la puissance mécanique qu'il sert à développer, et que les deux effets ne sont que la manifestation apparente à nos sens d'un seul et même phénomène.» Et ailleurs, après avoir montré que la théorie adoptée à cette époque conduisait à faire croire qu'une quantité finie de calorique peut fournir une quantité indéfinie de mouvement, ce qui ne peut, dit le judicieux auteur, être admis ni par le bon sens ni par la saine logique, M. Séguin ajoute (p. 382) : « Comme la théorie actuellement adoptée conduirait à ce résultat, il me paraît naturel de supposer qu'une certaine quantité de calorique disparaît dans l'acte même de la production de la force ou puissance mécanique, et réciproquement, et que les deux phénomènes sont liés entre eux par des conditions qui leur assignent des relations invariables. » N'en est-ce pas assez pour que Montgolfier et Séguin soient cités avec honneur comme des précurseurs très-prochains, tout au moins, de l'éminent physicien de Heilbronn.

Le Dr Hermann Klein, à qui l'Université de Gœttingue a décerné la seconde médaille, s'est borné à écrire quelques pages sur chacun des principes de la Mécanique, sans afficher la prétention de donner l'histoire complète de la Science. M. Klein, dans le cadre qu'il a adopté, ne pouvait donner plus de développement qu'on n'en trouve dans les admirables Chapitres de Lagrange sur un tel sujet, et la comparaison qu'il est bien difficile de ne pas faire, avec ces pages connues de tous, est un grand péril pour le jeune lauréat.

C'est sur le principe de la conservation de la force que l'auteur propose les considérations les plus développées. Le savant professeur de Dresde est loin d'accorder aux travaux de Robert Mayer l'importance capitale que M. Dühring, d'accord avec des juges éminents, tels que M. Verdet et M. Tyndall, n'hésite pas à lui assigner.

Les fondateurs du premier principe de la théorie mécanique de la chaleur sont, suivant lui, Colding, Joule, Hirn, Clapeyron, Boltzmann, Rankine, Thomson, et d'autres, Clausius surtout, tandis que Mayer a, le premier, appelé sur elle l'attention. Les physi-

ciens éminents dont il cite les noms auraient surtout, d'après M. Klein, résolu le problème posé par Mayer.

Cette appréciation ne paraît pas équitable. Mayer a résolu le problème qu'il a posé. La méthode qu'il indique très-clairement est aujourd'hui encore la meilleure et la plus exacte de toutes.

On est surpris de voir d'excellents esprits, notoirement étrangers à tout parti pris de louange ou de blâme, différer aussi complétement sur l'appréciation de documents parfaitement connus et relatifs à une question devenue très-simple. Le très-savant auteur d'une Esquisse historique sur la Théorie mécanique de la chaleur, M. Tait, est allé jusqu'à refuser à Mayer tout droit à la découverte de l'équivalent mécanique de la chaleur. Les principes qui le conduisent à une telle appréciation ressemblent un peu à ceux que, dans le cours de cet article, nous avons reprochés à M. Dühring; mais la sévérité, cette fois, semble dépasser toutes les bornes.

Mayer a affirmé, en 1842, que, si l'air échauffé sous pression constante exige, pour élever sa température de 1 degré, plus de chaleur que sous volume constant, cela tient à la nécessité de produire, dans le premier cas, un travail mécanique égal au produit de la pression par l'accroissement de volume, et dont l'équivalent est la différence des deux caloriques spécifiques. On déduit de là, ajoute l'éminent penseur, le chiffre de 361 kilogrammètres pour représenter une calorie, c'est-à-dire la chaleur nécessaire pour élever 1 kilogramme d'eau de 1 degré.

Or voici l'objection de M. Tait : le principe proposé par Mayer est exact, et si les données expérimentales avaient été plus précises à son époque, il aurait trouvé, comme on l'a fait depuis, le chiffre presque incontesté de 426. Mais le même raisonnement, appliqué à un liquide, à un corps solide ou à une vapeur, donnerait des résultats erronés. Le principe de Mayer est, dit M. Tait, que la chaleur développée par la compression est équivalente au travail dépensé dans cette compression; il ne fait pas la plus légère restriction sur la substance sur laquelle on peut expérimenter; les assertions sont tout à fait générales, et l'on peut ajouter qu'elles sont non-seulement inexactes, mais que, à certaines exceptions près, elles ne sont pas même une approximation grossière. Si, en effet, Mayer, au lieu d'un gaz, avait considéré un liquide ou un solide, il aurait, par un raisonnement identique, trouvé un résul-

tat très-différent, mais il ne l'a pas fait, et, s'il avait choisi un tel exemple, est-il permis d'affirmer qu'un des esprits scientifiques les plus pénétrants sans contredit de notre siècle n'aurait pas eu la perspicacité suffisante pour reconnaître que l'accroissement de volume d'un corps, indépendamment du travail qu'accomplit la surface en repoussant les obstacles, est lui-même un travail dont il faut tenir compte, que la force nécessaire pour bander un ressort d'acier est très-distincte du travail mesuré par le produit du changement de volume par la pression atmosphérique? Il serait plus équitable de voir une preuve de divination et un mérite de plus dans la hardiesse avec laquelle il a cru pouvoir, dans les gaz, négliger le travail moléculaire interne, qui est en effet négligeable.

La critique est surtout utile et féconde quand elle signale et fait admirer les idées grandes et nouvelles. Le temps les débarrasse, on peut en être certain, des imperfections qui s'y trouvent associées, et leur influence n'en est ni amoindrie ni retardée. M. Dühring l'a oublié dans plus d'une page de son savant Ouvrage, et les citations que nous avons faites laisseront sans doute cette impression au lecteur. J. Bertrand.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MONTHLY NOTICES of the Royal Astronomical Society of London. T. XXXIV; 1874.

RAPPORTS ANNUELS

ADRESSÉS AU CONSEIL DE LA SOCIÉTÉ ROYALE ASTRONOMIQUE, PAR LES DIRECTEURS DES DIFFÉRENTS OBSERVATOIRES DE LA GRANDE-BRETAGNE [1].

I. — Observatoire Royal de Greenwich.

Les travaux réguliers au cercle méridien et à l'altazimut, observations d'étoiles fondamentales, du Soleil, des planètes, grandes et

[1] Voir *Bulletin*, t. VII, p. 15.

petites, et de la Lune, qui forment les plus importants et comme la base essentielle de tous ceux de l'Observatoire, ont suivi leur marche accoutumée; et, depuis les grandes réparations qu'on lui a fait subir à la fin de 1872, l'altazimut ne laisse plus rien à désirer ([1]).

L'Astronome Royal a apporté à la pendule sidérale étalon de l'Observatoire une compensation barométrique, produite comme il suit : le balancier porte à son extrémité inférieure un aimant sur lequel agit un second aimant fixé au flotteur d'un baromètre à siphon et qui, par suite, s'approche ou s'éloigne alternativement du premier lorsque la pression barométrique vient à varier dans un sens ou dans l'autre.

Le grand équatorial de $0^m,32$ d'ouverture a servi à l'observation de la comète de Tempel et des planètes Vénus, Uranus et Neptune, sur lesquelles on n'a pu, malgré les circonstances favorables qu'offrait la conjonction inférieure de la première, observer aucun signe particulier. On a fait d'ailleurs subir à cet instrument plusieurs modifications qui permettront de lui adapter bientôt un puissant spectroscope de M. Browning.

Enfin M. E.-W. Maunder, chargé depuis le commencement de 1873 de toutes les observations spectroscopiques et photographiques, a utilisé le photohéliographe de Kew, ou l'un des nouveaux photohéliographes, à l'observation photographique du Soleil. Il a obtenu une nombreuse série d'épreuves, dont deux cents environ ont été conservées. Quelques-unes d'entre elles présentent un grand intérêt, en ce qu'elles montrent nettement la supériorité de l'observation photographique sur l'observation oculaire, au point de vue de l'examen et de l'obtention des détails des taches solaires.

Pendant le courant de l'année 1873 on a publié le volume des observations de 1871; à ce volume est joint un Appendice renfermant la description et l'histoire de l'équatorial à eau (*water telescope*).

([1]) Les observations faites au cercle méridien ont permis de constater dans le court espace de quinze jours un passage de la 5e à la 7e grandeur de l'étoile 241 de la liste de Schjellerup. Nous signalons ce fait curieux, parce qu'un instrument méridien est bien peu applicable à de pareilles recherches.

II. — Observatoire de Radcliffe, à Oxford.

Pendant l'année 1873, aucun changement notable n'a été introduit, soit dans le personnel, soit dans la direction des travaux de l'Observatoire.

Les observations méridiennes au cercle des passages de Carrington et les observations extra-méridiennes (occultations d'étoiles par la Lune, phénomènes des satellites de Jupiter) à l'équatorial de 7 pouces ($0^m,18$) sont toujours confiées à MM. Lucas et Keating.

M. F. Bellamy s'occupe surtout de l'observation des étoiles doubles avec l'héliomètre, et M. Luff est spécialement chargé des calculs, sous la direction immédiate de M. Main.

Ajoutons que le travail de composition du *Catalogue posthume d'étoiles doubles* de sir John Herschel, confié par le Conseil de la Société à MM. Pritchard et Main, touche à sa fin : plus des trois quarts de l'œuvre sont actuellement imprimés.

III. — Observatoire Savilien pour l'Astronomie physique, à Oxford.

Cet Observatoire, dû à l'initiative de M. Pritchard, *Savilian Professor* de l'Université, et dont la création a été décidée au mois de mars 1873, est en pleine voie de construction. Par deux votes, distants de peu de mois, le Conseil de l'Université a consacré 5000 livres sterling (125000 francs) tant à la construction d'un grand équatorial de 12,25 pouces ($0^m,31$) d'ouverture qu'à l'érection des bâtiments nécessaires à son installation et à celle des beaux instruments que M. Warren de la Rue venait de lui donner. L'établissement que l'on projette est surtout destiné à l'étude des différentes branches de l'Astronomie physique. Il comprendra, outre le grand équatorial dont nous venons de parler, le télescope avec lequel M. Warren de la Rue a fait presque tous ses travaux, sa machine à polir les miroirs, qui est suffisante pour une ouverture de 2 pieds ($0^m,71$), un appareil de Foucault pour leur vérification, un laboratoire photographique et spectroscopique, une lunette méridienne de 4 pouces ($0^m,10$), un télescope à réflexion de 13 pouces ($0^m,32$) de diamètre, monté altazimutalement pour l'observation des zones, et un altazimut de Troughton et Simms, installé dans le méridien, destiné à servir à l'instruction des élèves.

M. Pritchard compte que tous ces instruments seront en place et tous les bâtiments terminés avant la fin de l'année 1874.

IV. — Observatoire de Cambridge.

Les observations faites à Cambridge, pendant l'année 1873, se rattachent presque toutes à l'exécution du Catalogue de la zone de + 25 à + 30 degrés de déclinaison, entreprise de concert avec la Société Astronomique allemande [1].

D'ailleurs on a continué les observations météorologiques qui sont communiquées chaque jour à l'Office Météorologique central de Londres; mais en outre, par suite d'un accord survenu avec le *Meteorological Office* (*War Departement*) de Washington, une observation additionnelle est faite chaque jour à $0^h 45^m$, temps moyen de Greenwich, et les résultats en sont transmis à Londres tous les quinze jours.

V. — Observatoire Royal d'Édimbourg.

L'Observatoire Royal pour l'Écosse paraît être en complet désarroi. Le second assistant a donné sa démission et n'a pas été remplacé,

---

[1] Peu de temps après sa fondation, en 1867, cette Société se mettait à la tête d'une œuvre immense, la révision complète des étoiles du ciel boréal jusqu'à la 9e grandeur, et conviait tous les astronomes à l'aider dans son entreprise. Le ciel boréal fut partagé par zones, que chacun s'engagea à observer d'après un plan uniforme, et le travail de la plupart des collaborateurs est actuellement sur le point d'être terminé.

Voici la distribution de ces différentes zones entre les divers établissements coopérants :

Étoiles fondamentales	Poulkova	O. von Struve.
Zone de + 90 à + 80	Kiel	C.-A.-F. Peters.
» + 80 à + 75	Dorpat	Schwarz.
» + 70 à + 65	Christiania	C. Fearnley.
» + 65 à + 55	Helsingfors	Krüger.
» + 55 à + 50	Harvard-College (E.-U.)	Winlock.
» + 50 à + 40	Bonn	Thiele.
» + 40 à + 35	Chicago (E.-U.)	Safford.
» + 35 à + 30	Leyde	Kaiser.
» + 30 à + 25	Cambridge (A.)	Adams.
» + 25 à + 15	Berlin	Auwers.
» + 15 à + 10	Leipzig	Bruhns.
» + 10 à + 4	Mannheim	Schönfeld.
» + 4 à + 1	Neuchâtel	Hirsch.
» + 1 à — 2	Nicolaïef	Kortazzi.

et l'Astronome Royal, M. Piazzi Smyth (d'ailleurs fort âgé) et son seul assistant, M. Alex. Wallace, ne suffisent plus pour accomplir tout « ce qui serait désirable et qui a fait, depuis nombre d'années, la règle de l'établissement ». Aussi tout le travail de l'Observatoire, pendant l'année 1873, a-t-il consisté en la transmission quotidienne de l'heure par le *Time Ball* et le *Time Gun* et la réduction des observations météorologiques des cinquante-cinq stations de l'Écosse.

D'un autre côté, le nouvel équatorial de 18 pouces ($0^m,45$), dont la commande remonte déjà à quelques années, n'est point encore sorti des mains du constructeur.

VI. — Observatoire Royal de Dunsink (Dublin).

Pendant la plus grande partie de l'année 1873 (à partir du printemps), M. Brünnow, Astronome Royal pour l'Irlande, n'eut point d'assistant; de plus sa santé, compromise et souvent mauvaise, ne lui permit pas les travaux assidus auxquels il avait habitué le monde astronomique. Les résultats fournis par l'Observatoire de Dunsink sont donc beaucoup moindres que dans les années précédentes. Ils sont loin cependant d'être sans valeur.

Les observations d'étoiles doubles, avec le grand équatorial de $0^m,32$ d'ouverture, ont été continuées pendant la première partie de l'année, jusqu'à l'arrivée du nouveau cercle méridien de MM. Pistor et Martins de Berlin; il a été installé en mai, et, d'après M. Brünnow, il peut soutenir la comparaison avec les meilleurs qui aient été faits jusqu'ici. De plus, en vue d'une détermination de la parallaxe solaire, la planète Flora a été comparée en déclinaison, à son opposition d'octobre et novembre, avec les étoiles choisies par le Dr Galle de Breslau; enfin M. Brünnow a mesuré la différence de position de la nébuleuse planétaire du Dragon (classe IV, n° 37, de W. Herschel) [1] et des étoiles voisines. Il se proposait d'en déduire la parallaxe de cette nébuleuse, mais ces observations ne l'ont conduit qu'à un résultat négatif. Il faut en

---

[1] Sa position, pour 1860 janvier 0, est

$$\text{Æ} = 17^h\,58^m\,20^s,$$
$$\text{D.P.N} = 23°\,22'\,9'',5.$$

conclure que la parallaxe cherchée serait de $0'',05$ avec une erreur probable de $0'',03$, c'est-à-dire absolument insensible.

VII. — Observatoire de Durham.

Depuis la mort du Rev. Temple Chevallier, l'Observatoire de Durham est sous la direction de M. J.-I. Plummer, qui a complétement changé le plan des travaux de l'établissement : les phénomènes accidentels, les mesures micrométriques des diamètres des planètes et les recherches d'Astronomie physique sont maintenant son occupation importante.

En 1873, M. Plummer a obtenu une bonne série d'observations de la comète IV, 1873, et une étude suivie de ses apparences spectroscopiques : il en résulte que son spectre est entièrement semblable à celui de la comète de Winnecke, de 1868.

Nous devons aussi à l'Observatoire de Durham de précieuses mesures du diamètre de Vénus, faites à l'aide du micromètre à double image, et montrant que « l'intensité de l'irradiation change d'une manière tout à fait inattendue avec la transparence de l'atmosphère ».

Enfin les observations météorologiques ont été faites régulièrement, matin et soir, et leurs résultats communiqués chaque mois à l'*Office central* de Londres; et, à partir du 1er janvier 1874, l'Observatoire de Durham a participé aux observations synchrones, qui se font aujourd'hui sur tout l'hémisphère boréal à la demande des météorologistes américains.

VIII. — Observatoire de Glasgow.

Les ressources de l'Observatoire de Glasgow ont été surtout appliquées, pendant l'année 1873, à la réduction des observations méridiennes des années antérieures. Ces observations concernent une liste d'étoiles comprises entre la 6e et la 9e grandeur, choisies surtout dans les zones de Bessel. M. Grant espère pouvoir terminer, en 1875, les observations complémentaires et de contrôle que nécessite la comparaison des résultats des différentes années, et publier bientôt le Catalogue auquel doivent conduire ces longs travaux.

IX. — Observatoire de Kew.

On n'a pas fait, en 1873, d'observations astronomiques à Kew, les instruments principaux ayant été transportés à l'Observatoire Royal de Greenwich. MM. Warren de la Rue et Balfour Stewart s'occupent des mesures des photographies solaires obtenues à Kew pendant dix ans, de 1855 à 1866. Pendant l'année qui vient de s'écouler, M. Whipple a surtout mesuré les facules que contiennent les épreuves; en outre, tous les préparatifs ont été faits pour que les mesures micrométriques de taches solaires puissent commencer bientôt et être poursuivies sans délai.

X. — Observatoire de Liverpool (Bidston, Birkenhead).

L'Observatoire de Liverpool, fondé en 1845 pour l'étude des chronomètres de la marine marchande d'Angleterre, voit s'accroître d'année en année le champ de ses travaux; c'est à 400 ou 500 qu'il faut estimer le nombre des chronomètres envoyés à cet établissement dans le courant de l'année 1873. Avant d'indiquer les résultats auxquels a pu parvenir l'intelligente direction imprimée à cet établissement par M. Hartnup, rappelons en peu de mots le but à atteindre, la règle suivie et la méthode adoptée.

Le but est de fournir aux navigateurs les éléments qui leur permettent de tenir compte des changements de marche qu'éprouvent leurs chronomètres, par suite des variations de température et des défauts de leurs appareils de compensation. Or, c'est là un fait d'expérience, il existe pour chaque chronomètre une température déterminée T à laquelle il va plus vite qu'à toute autre; en outre, à mesure que la température s'éloigne, soit en dessus, soit en dessous, de celle du maximum de marche croissante, la marche diminue de plus en plus, et cela dans un rapport rapidement croissant; si bien que, en admettant, pour loi de cette variation, la proportionnalité du changement de marche au carré de la différence $T - t$ de la température T et de la température actuelle t, les résultats obtenus par le calcul sont sensiblement d'accord avec ceux que donne l'observation. Il faut donc trouver pour chaque instrument :

1° La température T du maximum de marche;

2° La marche M à la température T;

3° Enfin le facteur α par lequel il faut multiplier le carré de la différence $T - t$ pour obtenir la marche actuelle.

Pour trouver ces trois nombres, on maintient chaque chronomètre successivement pendant une semaine à trois températures équidistantes 55, 70 et 85 degrés F. (12°,8, 21°,0, 29°,5 C.) [1], et l'on observe sa marche pour chacune de ses températures. A l'aide de ces trois séries d'expériences et en se fondant sur la loi que nous avons admise, on obtient, par un calcul fort simple, les trois quantités inconnues T, M et α, c'est-à-dire les trois constantes du chronomètre mis en expérience.

En procédant ainsi, on a trouvé que :

1° La température T est généralement comprise entre 60 et 80 degrés F. (15°,5 et 26°,6 C.); dans quelques chronomètres, cependant, elle descend au-dessous de zéro F. ou s'élève au-dessus de 100 degrés F.

2° La valeur du facteur α est toujours comprise entre

$$0,001 \quad \text{et} \quad 0,006;$$

mais, dans la plupart des chronomètres, elle est de

$$0,003;$$

de sorte que, en général, pour supprimer les défauts de l'appareil de compensation, il faut changer la marche de $-0^s,67$ pour un écart de 15 degrés F. (8°,2 C.) de la température T; de $-2^s,70$ pour un écart de 30 degrés F. (16°,4 C.); et de $-6^s,08$ pour un écart de 45 degrés F. (25 degrés C.).

3° Pour un même chronomètre, les valeurs de T et de α ne paraissent pas changer sensiblement avec le temps : celle de la marche M sont au contraire assez variables, et il importe de profiter de toutes les occasions favorables pour redéterminer cette constante.

Le facteur α est réellement la mesure du degré de précision avec lequel les masses métalliques portées aux extrémités du spiral réglant opèrent la compensation; les fabricants de chronomètres

---

[1] Pour contrôler les premières observations, on repasse par les deux premières températures : ainsi chaque thermomètre se trouve en réalité soumis, chaque fois pendant une semaine, aux températures successives 55, 70, 85, 70 et 55 degrés F.

doivent donc mettre tous leurs soins à en faire descendre la valeur à la plus petite limite possible.

XI. — Observatoire de Stonyhurst.

Observations des phénomènes des satellites de Jupiter, et photographies du Soleil avec l'équatorial de 8 pouces ($0^m,20$) d'ouverture: tel est, avec quelques observations spectroscopiques, le bilan des travaux astronomiques de l'Observatoire de Stonyhurst, où, à partir du mois d'avril, on s'est surtout occupé de préparer l'expédition du directeur, le R. P. Perry, à l'île Kerguelen, pour l'observation du passage de Vénus.

L'enregistrement photographique des indications des principaux instruments magnétiques et météorologiques a d'ailleurs été continué sans interruption.

XII. — Observatoire de l'École de Rugby.

Le travail important de MM. Wilson et Seabroke a été la mesure des distances et angles de position de 430 étoiles doubles. Ils ont fait, en outre, une étude spectroscopique suivie de la chromosphère solaire, qui les a conduits à une série nombreuse de dessins remarquables des protubérances. Dans toutes ces observations, pour lesquelles ils étaient assistés par des élèves de l'École, MM. Wilson et Seabroke employaient un équatorial de 8,25 pouces ($0^m,21$) d'Alvan Clark.

XIII. — Observatoire de Cranford.

Cet Observatoire, fondé en 1856 à Cranford par M. Warren de la Rue, a été abandonné dans le courant du mois de juin 1873; son grand télescope et la plupart de ses instruments ont alors été donnés au nouvel Observatoire d'Astronomie physique fondé par l'Université d'Oxford.

XIV. — Observatoire de M. Barclay (Leyton).

Pendant l'année 1873, on a continué à Leyton les mesures régulières et systématiques d'étoiles doubles, ainsi que les observations

des comètes, éclipses, occultations et phénomènes des satellites de Jupiter.

En outre, le troisième volume des *Leyton Astronomical Observations* a été publié.

XV. — Observatoire de M. Bishop (Twickenham).

La formation des *Cartes écliptiques,* commencées en 1844 par M. Hind, aujourd'hui *Superintendant of the Nautical Almanac,* a été continuée par M. W.-E. Plummer aussi souvent que le ciel l'a permis. Les deux cartes relatives à la sixième heure d'ascension droite seront bientôt terminées; celles qui se rapportent à la douzième et à la quinzième heure d'ascension droite sont entre les mains du graveur.

En même temps, M. Plummer observait les deux comètes de Tempel à courte période (dont la seconde a été découverte le 3 juillet 1873), les comètes de MM. Paul Henry et Borrelly, et la comète à courte période de Brorsen. Il faisait les calculs nécessaires pour prédire et permettre d'observer le retour de la comète de Tempel (1867), de la comète de Brorsen (février 1846) [1].

Il déterminait les éléments paraboliques des comètes de MM. Paul Henry et Borrelly, et cherchait, mais à peu près en vain, à rectifier les éléments donnés autrefois par Encke pour la comète découverte le 20 juillet 1812 par Pons, et plus tard, et tout à fait indépendamment, par Wisniewsky [2].

M. G. Bishop termine son Rapport en annonçant que toutes les observations de comètes faites à son Observatoire, depuis qu'il a été transféré à Twickenham, sont actuellement sous presse. Le volume qu'elles fourniront sera du plus haut intérêt pour la science astronomique [3].

---

[1] L'éphéméride de cette comète, communiquée à M. Stephan, directeur de l'Observatoire de Marseille, lui a permis de la retrouver le 31 août 1873.

[2] M. Plummer employait dans ce but deux séries d'observations françaises, négligées par Encke, celle de Bouvard à l'Observatoire de Paris, et celle de Flaugergues à Viviers.

[3] Nous ajouterons que MM. Hind et Plummer ont cru revoir l'étoile découverte par Tycho, le 11 novembre 1572, au voisinage de Cassiopée, et qu'on appelle *étoile de Tycho* (ou *Nova,* 1572). Elle serait très-faible et à $29^s,6$ après et à $10'4'',1$ au sud de l'étoile de 8,9 grandeur, marquée n° 22 dans la zone 60 d'Argelander.

XVI. — Observatoire de M. Huggins (Upper-Tulse-Hill).

Les observations les plus importantes de M. Huggins se rapportent à la spectroscopie des étoiles et des nébuleuses.

31 étoiles ont été observées, et l'on a trouvé que, parmi elles, 11 se rapprochaient et 20 s'éloignaient de la Terre, avec des vitesses variant de 15 à 50 milles par seconde.

Quant aux nébuleuses, leur étude a conduit à ce résultat, que les vitesses de leurs mouvements par rapport à la Terre sont bien différentes de celles de la plupart des étoiles. Le spectre des nébuleuses se compose en général de quatre raies, dont les positions sont les suivantes par ordre de longueurs d'ondulations décroissantes :

1° La raie la plus brillante du spectre de l'azote est double et composée de deux lignes mal terminées, formant deux espèces de bandes nébuleuses : la première raie du spectre des nébuleuses coïncide très-sensiblement avec le milieu de la plus intense (la moins réfrangible) de ces deux bandes, et, d'après l'échelle d'Ångström, a pour longueur d'ondulation 500,4 [1]. Cette raie coïncide très-sensiblement aussi avec une raie bien distincte, étroite et assez forte du spectre du plomb. Cette circonstance a été utilisée pour la mesure des mouvements propres des nébuleuses.

2° La deuxième raie coïncide sensiblement avec une ligne étroite et forte du spectre obtenu en faisant éclater l'étincelle d'induction sur la surface du chlorure de fer $FeCl^2$, dont la longueur d'ondulation est 495,7.

3° Les deux autres raies, qui se retrouvent probablement dans les spectres de toutes les nébuleuses gazeuses, coïncident avec les raies α et β du spectre de l'hydrogène et indiquent la présence de cette substance dans toutes ces nébuleuses.

XVII. — Observatoire de lord Lindsay (Dun-Echt, Aberdeenshire).

L'année 1873 a été consacrée entièrement aux travaux d'installation de cet Observatoire, dont la création a été décidée en 1872,

---

(1) Ces deux raies sont ainsi notées dans les *Spectres lumineux*, de M. Lecoq de Boisbaudran : « Nébuleuse, très-forte double, mais à éléments très-voisins; la raie la moins réfrangible est plus forte que l'autre. »

et aux préparatifs de l'expédition de lord Lindsay à Maurice, pour l'observation du passage de Vénus.

Sont actuellement montés et installés : l'équatorial de 6 pouces ($0^m,15$) de Cooke; l'équatorial de 15 pouces ($0^m,38$) de Grubb; le cercle méridien de 8 pouces d'ouverture ($0^m,20$) de Troughton et Simms; le sidérostat de MM. Eichens et Martin; et enfin l'héliomètre de 4 pouces ($0^m,10$) d'ouverture de Repsold.

En même temps, on étudiait complétement cet héliomètre que l'on doit emporter à Maurice et un objectif de 4 pouces ($0^m,10$) d'ouverture et 40 pieds ($12^m,9$) de foyer, dû à Dallmeyer, qui servira d'appareil photographique du passage, suivant la méthode recommandée par les astronomes américains.

XVIII. — Observatoire de M. Lockyer.

Continuant ses travaux de prédilection et l'étude de l'atmosphère solaire, dont il est l'un des inventeurs et des maîtres, M. Lockyer, aidé par M. R.-J. Friswell, s'est surtout attaché à profiter de toutes les occasions favorables pour obtenir des dessins de la chromosphère, la forme et la hauteur des protubérances, la direction de l'inclinaison de leurs filaments ou langues. Ils ont fait, en outre, de nombreuses observations spectroscopiques des taches du Soleil, notant avec soin les métaux dont les raies étaient épaissies ou tordues, et veillant au renversement lumineux des raies de l'hydrogène. Enfin ils ont pris un grand nombre de photographies du spectre du Soleil et des métaux solaires, et effectué les réductions de ces photographies.

Toutes les observations ont été faites avec un équatorial de Cooke de 6 pouces ($0^m,15$) d'ouverture; mais, au mois de septembre 1873, le spectroscope à sept prismes, que l'on employait jusque-là, a été remplacé par un magnifique réseau de M. Rutherfurd.

Cet appareil, dont la monture est très-simple et n'exige qu'une lentille collimatrice et une fente ordinaire, donne un éclairement bien supérieur à celui du spectroscope à sept prismes. Il est plus maniable et bien meilleur au point de vue spectroscopique, tout en ayant le même pouvoir dispersif.

XIX. — Observatoire du comte de Rosse (Parson's Town).

Le télescope, le Léviathan ($1^m,82$ d'ouverture et $16^m,61$ de foyer), que le comte de Rosse vient de faire munir d'un mouvement d'horlogerie, a été employé à la suite de la révision du Catalogue des nébuleuses de sir J. Herschel, aux mesures micrométriques qu'elle nécessite et à de nombreuses observations physiques de Jupiter, Uranus et Neptune.

D'un autre côté, le comte de Rosse publiait les résultats des recherches qu'il a faites en 1868, 1869 et 1870 avec le télescope de 3 pieds ($0^m,61$) sur la radiation de la chaleur lunaire, la loi de son absorption par notre atmosphère et la variation de son intensité dans les différentes phases de ses lunaisons. D'après cet astronome, la radiation calorifique lunaire suit la même loi que Zöllner avait trouvée, en 1865, avec son *Astrophotomètre*, pour la variation de sa radiation lumineuse, et la chaleur de la Lune se composerait de 90 pour 100 de chaleur obscure et 10 pour 100 de chaleur lumineuse [1].

XX. — Observatoire du Cap de Bonne-Espérance.

Pendant l'année 1873, l'Observatoire du Cap de Bonne-Espérance a terminé les observations des étoiles de grandeur inférieure à la septième et comprises dans la zone 175 à 165 degrés D. P. N. du Catalogue de La Caille, et fait la liste préparatoire des étoiles de la zone de 165 à 145 degrés D. P. N.

En outre, M. Stone s'est associé aux observations correspondantes de la planète Flora demandées par le Dr Galle, et a publié le *Cape Catalogue of* 1159 *stars for the epoch* 1860, déduit des observations faites au Cap, de 1856 à 1861.

XXI. — Observatoire de Melbourne.

Les observations méridiennes, faites à Melbourne pendant l'année

(1) La formule de Zöllner est la suivante :

Soient q et q' les quantités de lumière envoyées par la Lune dans deux phases différentes de la lunaison, a et a' la distance angulaire de la Lune et du Soleil, β une constante, on a

$$\frac{q}{q'} = \frac{\sin(a-\beta) - (a-\beta)\cos(a-\beta)}{\sin(a'-\beta) - (a'-\beta)\cos(a'-\beta)}.$$

1873, ont surtout porté sur les étoiles voisines de l'horizon nord, et ont été dirigées de façon à donner la valeur de la réfraction des deux côtés du zénith.

Quant au grand télescope ($1^m,22$ d'ouverture et $8^m,54$ de foyer), il a été employé presque constamment; outre de nombreuses et très-belles photographies de la Lune, plusieurs dessins de nébuleuses qui ont montré toute l'étendue des changements auxquels ces astres sont sujets, on a obtenu avec lui [et avec l'équatorial de 6,25 pouces ($0^m,16$) qui lui servait d'auxiliaire] une belle série de comparaisons de la planète Flora et des étoiles voisines choisies par M. Galle, de Breslau.

Le miroir de 12 pouces ($0^m,30$) n'a point été employé aux observations astronomiques; mais on s'en est servi pour acquérir l'expérience du doucissage et du polissage des miroirs métalliques. Les observations magnétiques et météorologiques ont d'ailleurs été continuées sans interruption.

XXII. — Observatoire de Sydney.

De grandes améliorations ont été apportées au matériel de l'Observatoire de Sydney. L'équatorial de Merz et Mahler ($0^m,19$ d'ouverture) a été réparé, muni d'un mouvement d'horlogerie, et réinstallé; un télescope de 10 pouces ($0^m,25$) d'ouverture monté, et deux miroirs en verre colonial de 10,75 pouces ($0^m,27$) d'ouverture faits à l'Observatoire même. Les observateurs ne chômaient d'ailleurs point pour cela, et l'on a fait à Sydney, pendant l'année 1873, 1488 observations de passages, 370 mesures d'angles de positions et de distances d'étoiles, 155 déterminations d'ascensions droites et 80 de déclinaisons d'amas d'étoiles, et aussi de nombreuses mesures de positions d'étoiles colorées en jaune-rouge et en bleu; en même temps, on continuait régulièrement les observations magnétiques et météorologiques.

Nous devons ajouter que le Directeur de l'Observatoire de Sydney et celui de Melbourne ont été chargés par leurs gouvernements respectifs de tous les préparatifs nécessaires à l'observation du passage de Vénus en Nouvelle-Galles du Sud et dans l'État de Victoria.

C. A.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. LIOUVILLE. — Troisième série, publiée par H. RESAL.

T. Ier; janvier-juin 1875 (1).

Cette troisième série débute par la Préface suivante :

« Le Savant illustre qui a fondé le *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* en 1836, a pris la décision définitive de renoncer à la rédaction de ce Recueil à partir de 1875, malgré les instances qui lui ont été adressées, malgré les regrets du monde savant.

» Nous n'aurions pas osé reprendre, à nous seul, le travail ainsi interrompu ; mais le concours actif que nous ont assuré plusieurs savants distingués peut faire espérer que nous ne resterons pas trop au-dessous de notre tâche. N'est-ce pas d'ailleurs faire œuvre utile que de contribuer à maintenir la publication de ce Journal, alors que les Recueils du même ordre sont si rares en France, et que nos savants éprouvent tant de difficultés à faire paraître leurs Mémoires ?

» Au moment où prend fin, avec la deuxième Série du Journal, le travail poursuivi pendant trente-neuf années par M. LIOUVILLE, dans le but unique d'être utile à la Science et à son pays, nous sommes l'interprète de tous en exprimant ici les sentiments d'admiration et de reconnaissance qu'inspire une œuvre aussi considérable. »

JORDAN (C.). — *Sur la stabilité de l'équilibre d'un solide pesant sur un appui courbe.* (36 p.)

Le problème que se pose M. Jordan présente une particularité remarquable. Il y a pour un solide pesant, reposant sur un appui courbe, une infinité de positions d'équilibre voisines les unes des autres. Il est clair, en effet, qu'on peut faire tourner le corps autour de la verticale du point d'appui sans que l'équilibre cesse de subsister. Les conditions de stabilité établies sont les suivantes :

1° Le centre de gravité du corps mobile C′ doit être situé au-dessous des centres de courbure de la surface extérieure S′.

2° Les courbures minimum et maximum A′ et B′ de la surface

(1) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 17.

S′ doivent être respectivement de même signe que les courbures minimum et maximum A et B de la surface de l'appui.

Dans la Section I, l'auteur prouve que ces conditions sont suffisantes, en établissant que, si elles sont satisfaites, le centre de gravité de C′ ne peut s'abaisser, quand on dérange le corps C′ infiniment peu de la position d'équilibre.

Cette démonstration présente cette particularité, qu'elle exige la considération des infiniment petits du quatrième ordre, dans le cas où $A' < B$. Au contraire, on peut s'arrêter au second ordre si $A' > B$.

Ces deux cas se distinguent d'ailleurs, au point de vue mécanique, par une différence essentielle. Si $A' > B$, le solide pourra pivoter sur son appui avec une liberté complète. Dans le second cas, il existe un azimut que sa rotation ne saurait franchir sans qu'il pénétrât dans l'appui.

Dans la Section II, l'auteur fait connaître les équations qui régissent les oscillations du solide, supposées infiniment petites. Ces équations sont linéaires. Leurs coefficients sont des fonctions périodiques du temps, variant avec une extrême lenteur. M. Jordan démontre que, en se renfermant dans les limites du temps où cette variation des coefficients peut être négligée, l'amplitude des oscillations croîtrait au delà de toute limite si les deux conditions ci-dessus n'étaient pas remplies. Elles sont donc nécessaires à la stabilité.

Ces conditions étant supposées satisfaites, les équations à coefficients périodiques précédentes régiront le phénomène pendant toute la durée du mouvement, si $A' > B$. Au contraire, si $A' < B$, on pourra distinguer trois périodes de mouvement régies par des équations de forme différente.

Enfin le Mémoire se termine par l'intégration complète de ces équations linéaires dans les deux cas suivants :

1° Si l'appui est de rotation ;

2° Si le corps mobile est de révolution (par sa constitution intérieure, comme par sa surface extérieure).

Resal (H.). — *De la résistance au choc d'une chaîne à maillons plats.* (14 p.)

Mannheim (A.). — *Sur les surfaces trajectoires des points d'une*

figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions. (18 p.)

L'auteur démontre plusieurs théorèmes, parmi lesquels nous citerons les suivants :

Parmi les surfaces trajectoires des points d'une droite mobile, il y en a deux qui sont tangentes à cette droite.

Le lieu des points d'une figure dont les trajectoires ont leurs plans osculateurs normaux aux surfaces trajectoires de ces points est une surface du sixième ordre.

Le lieu des points d'une figure de forme invariable dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal nul est la surface réglée imaginaire du quatrième ordre qui passe par le cercle imaginaire et par les droites D, Δ.

Le lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points d'une droite est une courbe gauche du sixième ordre.

Le lieu des points d'une figure dont les surfaces trajectoires ont des rayons de courbure égaux et de signes contraires est une surface du cinquième ordre.

Laurent (H.). — *Sur la méthode des moindres carrés.* (6 p.)

Si l'on désigne par $\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$ la probabilité que, dans une observation, l'erreur sera comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, la fonction $\varphi(\varepsilon)$ est ce qu'on appelle la facilité de l'erreur ε. Laplace justifie la méthode des moindres carrés, quelle que soit la forme de la fonction $\varphi(\varepsilon)$, pourvu, bien entendu, que cette fonction tende rapidement vers zéro pour $\varepsilon = \pm\infty$; mais la théorie de Laplace suppose essentiellement que le nombre des observations soit très-grand. Pour de très-grands nombres d'observations, la fonction $\varphi(\varepsilon)$ se réduit sensiblement à la forme

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2},$$

et cela aux termes du quatrième ordre près. Il résulte de là que, si la facilité de l'erreur était rigoureusement exprimée par la fonction précédente, la méthode des moindres carrés serait justifiée, quel que soit le nombre des observations. Gauss admet précisément cette loi de la facilité de l'erreur, et il la justifie en admettant que la moyenne arithmétique de plusieurs mesures inexactes est la

valeur la plus probable de la quantité mesurée. C'est cette hypothèse de Gauss que M. Laurent déclare inadmissible, et qu'il s'est proposé de renverser en instituant une série de 1444 observations. La conclusion du travail est celle-ci : on doit révoquer en doute l'exactitude de la loi de Gauss, et, par suite, il est prudent de rejeter la méthode des moindres carrés, quand on n'a qu'un petit nombre d'observations.

Breton (de Champ). — *Sur les prétendues inadvertances dans lesquelles Lagrange serait tombé, suivant Poinsot, relativement à deux points fondamentaux de la Mécanique analytique.* (18 p.)

L'auteur, dans un article qui est inséré plus loin dans le même volume, page 263, accuse à tort, selon nous, Poinsot d'avoir attaqué avec peu de circonspection l'illustre Mémoire de Lagrange. On pourrait, à bon droit, qualifier l'article actuel d'attaque inconsidérée contre le Mémoire de Poinsot et l'édition de la *Mécanique analytique* due à M. Bertrand. Pour nous en tenir au premier seulement des points examinés par M. Breton, il suffit de lire la *Mécanique analytique,* et, en particulier, la page 39 de l'édition de M. Bertrand, pour reconnaître que la remarque de Poinsot, inspirée d'ailleurs par un profond respect pour l'œuvre de Lagrange, était parfaitement justifiée et pouvait être très-utile aux lecteurs de la *Mécanique analytique.*

Laguerre. — *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique.* (14 p.)

Nous avons déjà parlé (voir *Bulletin,* t. III, p. 379) de ce que M. Laguerre appelle l'*équation mixte* d'une courbe. Le Mémoire actuel est consacré à l'étude de l'emploi de telles équations.

Le Chapitre I traite de l'équation mixte de la polaire d'une droite.

Le Chapitre II traite de l'équation mixte de la hessienne et de la cayleyenne d'une courbe.

Le Chapitre III traite de la détermination de l'équation mixte de la polaire d'une droite.

Le Chapitre IV contient les applications de la théorie précédente aux courbes de troisième et de quatrième classe.

Resal (H.). — *Recherches sur la dispersion des éléments d'un obus à balles après l'explosion.* (20 p.)

L'auteur commence par rechercher (Chap. I) le poids de poudre strictement nécessaire pour briser un projectile creux qui ne renfermerait pas de balles. Il traite successivement de l'explosion de projectiles sphériques et cylindriques. Dans le Chapitre II, il examine l'influence de la rotation du projectile sur la dispersion, et il discute cette influence d'une manière détaillée.

Brisse (Ch.). — *Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable.* (Suite.) (12 p.)

Ce travail, dont nous avons déjà parlé (*Bulletin*, t. II, p. 37), contient la démonstration de tous les théorèmes énoncés par M. Chasles sur le déplacement fini. Voici les titres des différentes sections :

V. Déplacement d'une figure sphérique sur la sphère. Déplacement d'un corps solide retenu par un point fixe.

VI. Déplacement d'un corps solide dans l'espace.

Bertrand (J.). — *Réponse à l'article intitulé : « Sur de prétendues inadvertances dans lesquelles Lagrange serait tombé*, etc. » (2 p.)

Mathieu (É.). — *Mémoire sur des formules de perturbation.* (26 p.)

Voici comment l'auteur présente son travail :

« Poisson, après avoir donné ses formules générales de perturbation, dans le XV[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, les applique au mouvement d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe, et sur lequel n'agissent que des forces perturbatrices ; il trouve ainsi, page 336, des formules toutes semblables à celles qui sont relatives à la perturbation du mouvement d'une planète, ou plus généralement du mouvement d'un point attiré par un centre fixe. Dans ces formules, les constantes relatives au plan de l'orbite sont remplacées par celles qui déterminent la position du plan dit *invariable*, qui est fixe quand le corps n'est sollicité par aucune force, mais qui se déplace par suite de la perturbation.

» La parfaite analogie de deux systèmes de formules provenant de questions si différentes a attiré l'attention de Jacobi (tome III de ses *Œuvres*, p. 279). Après avoir embrassé, par une même analyse, les deux problèmes précédents, pour montrer qu'ils sont réductibles aux quadratures, il montre que les six constantes arbi-

traires, devenues variables par les perturbations, satisfont à ses équations canoniques. Il développe ensuite seulement les calculs indiqués, pour le point attiré par un centre fixe, et trouve la signification des deux constantes conjuguées, l'une à l'axe du plan invariable, et l'autre à la projection de cet axe sur une perpendiculaire à un plan fixe pris pour plan des x, y; mais, si l'on applique ces mêmes calculs au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, on est conduit à des opérations beaucoup plus compliquées que ne le nécessite la question en elle-même, et il paraît difficile, en suivant cette marche, de déterminer la signification de ces deux constantes. D'ailleurs, la démonstration obtenue ainsi cessant d'être la même que pour le premier problème, il n'y aurait plus de raison de la préférer à celle qui a été donnée par Poisson.

» D'après cela, il m'a semblé utile, pour la philosophie de la Science, de chercher à démontrer entièrement, par la même analyse, les deux systèmes de formules de perturbation, et, en cherchant à reconnaître quels sont les liens communs aux deux questions, je suis arrivé à un théorème général qui renferme la démonstration de ces deux systèmes de formules. »

MÉLANGES.

CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ENTRE LEGENDRE ET JACOBI (1).

(Suite et fin.)

Jacobi à Legendre.

Potsdam, le 14 juin 1829.

Monsieur,

Conformément à ce que vous avez la bonté de m'écrire dans votre lettre du 4 juin, je vous envoie un quatrième exemplaire pour l'Académie. Je l'ai adressé à M. le baron de Fourier, secrétaire per-

---

(1) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 51.

pétuel de l'Académie, puisque j'ignore le nom du Président. Veuillez bien le lui faire parvenir et excuser la peine que je vous fais. Votre bonté envers moi et votre générosité sont telles, que je ne sais vous en rendre de grâces dignes.

Peu de jours après l'envoi de ma dernière lettre, j'appris la triste nouvelle de la mort d'Abel. Notre Gouvernement l'avait appelé à Berlin, mais l'appel ne l'a pas trouvé parmi les vivants. L'espérance que j'avais conçue de le trouver à Berlin a été si cruellement déçue! Les vastes problèmes qu'il s'était proposés, d'établir des critères suffisants et nécessaires pour qu'une équation algébrique quelconque soit résoluble, pour qu'une intégrale quelconque puisse être exprimée en quantités finies, son invention admirable de la propriété générale qui embrasse toutes les fonctions qui sont des intégrales de fonctions algébriques quelconques, etc., etc., marquent un genre de questions tout à fait particulier, et que personne avant lui n'a osé imaginer. Il s'en est allé, mais il a laissé un grand exemple.

Je vous rends mille grâces de votre second Supplément, qui avait fait le grand détour par Königsberg. Les démonstrations différentes de celles que vous trouverez dans mon petit Ouvrage, et les développements que vous avez ajoutés à plusieurs points importants me l'ont rendu fort intéressant. Quant au calcul numérique des intégrales elliptiques de troisième espèce à paramètre circulaire, je vous demande pardon d'avoir fait naître en vous une espérance qui n'a pas été réalisée depuis. Cependant je crois que vous n'avez pas à regretter trop l'inconvénient que ces fonctions ne peuvent être réduites en Tables à double entrée. Les moyens que vous avez indiqués pour leur évaluation dans le second Supplément sont tels, qu'on doit considérer ces fonctions tout à fait comme des quantités finies. Je crois même qu'au moyen de quelques Tables à simple entrée on peut faciliter tellement leur calcul, que la peine de les calculer au moyen de mes séries devienne plus petite que celle qu'exige l'interpolation dans une Table à double entrée.

Ce qui regarde la démonstration que j'ai donnée de mon théorème I, dans le *Journal de M. Schumacher*, elle repose sur le théorème « qu'étant trouvées trois fonctions entières et rationnelles de x quelconque U, V et T, telles que

$$(U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2 V^2) = (1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2) T^2,$$

on aura toujours, en mettant $y = \frac{U}{V}$,

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

M désignant une constante »; théorème fondamental qui a été prouvé au commencement de ma démonstration, et dont il ne se trouve pas fait mention dans le premier Supplément. Dans mon Ouvrage, j'ai désigné ce théorème sous le nom de *principe de la transformation des fonctions elliptiques*. En effet ce principe suffit pour qu'on puisse établir la théorie générale de la transformation, en réduisant cette dernière à un problème algébrique qu'on peut toujours résoudre, les constantes indéterminées étant en nombre suffisant pour remplir les conditions du problème. Pour compléter ma démonstration, telle qu'elle se trouve dans le premier Supplément, il suffira d'ajouter en peu de mots la démonstration du théorème mentionné. La double substitution vous fournissant les valeurs de $U \pm V$, $U \pm \lambda V$ résolues en facteurs, et telles qu'on a

$$U - V = (1 - x)A^2, \quad U - \lambda V = (1 - \varkappa x)C^2,$$
$$U + V = (1 + x)B^2, \quad U + \lambda V = (1 + \varkappa x)D^2,$$

A, B, C, D étant des fonctions entières, tout se trouvera prouvé rigoureusement. Abel s'est servi du même principe, de sorte que nos démonstrations sont au fond les mêmes. Vous êtes le premier, monsieur, qui avez montré qu'on peut s'en passer, en effectuant la substitution elle-même au moyen de la résolution en fractions simples. Aussi je n'ai pas tardé à exposer dans mon Ouvrage cette démonstration, qui vous est propre et qui donne une excellente vérification. A présent, je suis en possession d'un nombre assez grand de démonstrations différentes. Je remarque, à cette occasion, que le mérite principal d'Abel, dans la théorie de la transformation, consiste dans sa démonstration que *nos formules embrassent toutes les substitutions algébriques possibles*, ce qui donne un haut degré de perfection à cette théorie.

Vous vous plaignez des infirmités de votre âge. Ah! monsieur, ces excellents Suppléments que vous venez de composer, en partant de quelques légères Notices que j'avais données sans démonstration,

montrent que c'est encore la vigueur et l'énergie de la jeunesse qui vous animent, et font concevoir l'espérance que le ciel conservera encore longtemps une vie aussi chère.

Mes parents m'ont prié de vous faire leurs civilités et vous rendent grâces des bontés que vous avez bien voulu avoir pour moi. Soyez assuré, monsieur, que je n'oublierai jamais ces bontés, et que je suis avec le respect le plus profond

Votre tout dévoué,

C.-G.-J. Jacobi.

Je ne retournerai à Königsberg que cet hiver.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 16 juillet 1829.

Je ne veux pas différer plus longtemps, monsieur, de répondre à votre lettre du 14 juin dernier, car il faut que vous sachiez que j'ai reçu les quatre exemplaires destinés pour trois de mes confrères et pour moi, et de plus un cinquième qui est arrivé un peu plus tard pour l'Académie. Le tout a été distribué selon vos intentions, et j'ai été chargé de vous adresser les remercîments de ces messieurs, auxquels je joins les miens. M. Fourier vous adressera probablement ceux de l'Académie; d'ailleurs M. de Mirbel, son président, a chargé M. Poisson de faire de votre Ouvrage un Rapport verbal à l'Académie, ce qui me procurera le plaisir d'entendre citer avec éloge les beaux travaux par lesquels vous avez considérablement perfectionné une branche importante de l'Analyse, et qui déjà vous placent au nombre des géomètres les plus distingués de l'Europe.

L'exécution typographique de votre Ouvrage paraît, surtout dans mon exemplaire qui est sur papier fin, d'une beauté remarquable. Je regrette seulement que vous n'ayez pas été à portée de corriger les épreuves; car, outre les fautes indiquées dans l'*errata*, il me paraît qu'il en reste encore un assez bon nombre. Par exemple, je trouve, pages 29, 30, 67 et 69, que les équations modulaires pour les nombres 3 et 5 sont

$$u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2v^2) = 0,$$

$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0.$$

Mais, puisque vous supposez $u > v$ [voir la formule $\lambda = x^n (\ldots)$, page 37], il est évident que les premiers membres de ces équations sont composés l'un de deux binômes dont la valeur est positive, l'autre de trois binômes semblables. Les vraies équations, telles que je les ai données, pages 68 et 75 de mon premier Supplément, sont

$$u^4 - v^4 - 2uv(1 - u^2v^2) = 0,$$

$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) - 4uv(1 - u^4v^4) = 0\ (^1),$$

et alors, pour le dire en passant, on ne peut échanger entre eux u et v, mais bien u et $-v$.

Au reste, j'ai remarqué beaucoup de choses dans votre Ouvrage qui sont nouvelles pour moi et dont je pourrai profiter, s'il m'est donné de publier un troisième Supplément. Mais il me faudra beaucoup de temps et de travail pour me mettre en état de traduire en langage vulgaire le résultat des hautes spéculations auxquelles vous vous êtes livré, car nous écrivons dans deux genres fort différents.

J'applaudis aux efforts heureux que vous avez faits dans la partie purement spéculative, en traitant des transformations imaginaires, et résolvant les équations algébriques les plus difficiles par des formules très-élégantes; mais l'objet de mon Ouvrage se rapproche beaucoup plus de la pratique; je cherche à recueillir tout ce qui peut faciliter l'usage de mes fonctions, afin d'en faire un véritable instrument de calcul, comme l'ont été jusqu'ici les fonctions circulaires et logarithmiques.

Je devrais borner là ma lettre, et ne vous point parler des changements de nomenclature que vous proposez dans votre article 17, page 31; mais, comme d'autres personnes pourraient vous représenter qu'en cela vous avez fait une chose qui doit m'être désagréable, je ne vois pas pourquoi je vous cacherais ce que je pense de cette proposition. Je vous dirai donc franchement que je n'approuve pas votre idée, et que je ne vois pas de quelle utilité elle peut être pour vous et pour la Science.

---

(1) Ces deux équations se trouvent avec les mêmes signes dans la Notice de Jacobi du 2 avril 1828 (*Journal de Crelle*, vol. III, p. 194), et avec un double signe dans la lettre de Jacobi à Legendre datée du 12 janvier 1828.

La plus simple des fonctions elliptiques, savoir, l'intégrale

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}},$$

jouit de tant et si belles propriétés; considérée seule, elle est liée par de si beaux rapports avec les deux autres fonctions dites de la *seconde* et de la *troisième espèce* que l'ensemble de ces trois fonctions forme un système complet auquel on pourrait donner un autre nom que celui de *fonctions elliptiques*, mais dont l'existence est indépendante de toute autre fonction. La nomenclature méthodique que j'ai proposée, dès 1793, dans mon *Mémoire sur les transcendantes elliptiques*, a été adoptée généralement; vous l'avez trouvée établie : quelles sont donc vos raisons pour vous écarter de l'usage général? Vous faites schisme avec M. Abel et avec moi; vous faites schisme avec vous-même, puisque, après avoir appelé *fonctions elliptiques* les sinus, cosinus et autres fonctions trigonométriques de l'amplitude, vous êtes encore obligé d'appeler *fonctions de troisième espèce* celles que je désigne sous le même nom. N'est-ce pas ce que veut dire le titre de l'article 56, page 160? Pourquoi désignez-vous, comme moi, la fonction de troisième espèce tantôt par $\Pi(u, a)$, tantôt par $\Pi(u, a + K', x)$? Quelle liaison y a-t-il entre ces fonctions et la première, qui n'est plus, suivant vous, qu'un argument de fonction? Je vous laisse à expliquer toutes ces choses. Du reste, je vous fais part confidentiellement de ces observations, dont vous ferez tel usage que vous voudrez, et auxquelles je ne donnerai jamais aucune publicité. Il me suffira de vous avoir témoigné ma surprise sur l'inconvenance et la bizarrerie de votre idée; elle n'altérera en rien les sentiments d'estime et d'affection que j'ai conçus pour vous et dont je vous renouvelle l'assurance.

LEGENDRE.

Jacobi à Legendre.

Francfort, le 19 août 1829.

Monsieur,

Dans un voyage que j'ai entrepris en Allemagne, étant arrivé près des rivages du Rhin, je ne puis résister au désir de vous voir à Paris. J'y partirai donc dans quelques jours, pour y passer plusieurs semaines. Je ne saurais mieux profiter de la permission que le Gouvernement m'a voulu accorder pour ce semestre pour pouvoir jouir d'une récréation de mes études. Je brûle du désir de voir l'homme auquel je suis le plus redevable des bontés qu'il a voulu avoir pour moi, et de lui témoigner tous les sentiments que peuvent inspirer l'admiration et la reconnaissance.

Comme j'écris ceci en hâte, je ne puis répondre que quelques mots aux reproches que vous m'avez faits dans votre dernière Lettre, et pour lesquels je vous rends grâces mieux encore que pour les éloges que vous m'avez prodigués et que j'ai si peu mérités. Il me fallait absolument une dénomination pour les fonctions sin am, cos am, etc., dont les propriétés répondent parfaitement à celles des fonctions sin, cos, dites *circulaires*. D'un autre côté, l'application importante qu'on fait de la théorie des fonctions elliptiques au Calcul intégral rendait nécessaires les distinctions et les dénominations que vous avez introduites dans l'Analyse, et qui ont été accueillies par tous les géomètres. J'ai donc trouvé convenable d'appeler les intégrales auxquelles vous donnez le nom de *fonctions elliptiques de la première, seconde, troisième espèce*, *intégrales elliptiques de la première, seconde, troisième espèce,* et d'étendre ou d'attribuer de préférence la dénomination de *fonctions elliptiques* aux sin am, cos am, Δ am, analogiquement, comme on nomme *fonctions circulaires* les sinus, cosinus, etc. Si cela vous déplaît, toute autre dénomination me sera agréable. Dans tous les cas, je crois que nous deviendrons aisément d'accord sur cet objet [1].

Votre tout dévoué serviteur,

C.-G.-J. Jacobi.

---

[1] La correspondance, interrompue après cette Lettre par le voyage de Jacobi en France et par son séjour à Paris, n'a été reprise que l'année suivante et ne s'élève plus à son niveau antérieur, les fonctions elliptiques ne formant plus, ni pour Legendre ni pour Jacobi, l'occupation presque exclusive. B.

Jacobi à Legendre.

Königsberg, le 2 juillet 1830.

Monsieur,

Je vous prie de vouloir bien m'excuser de ne vous avoir pas plus tôt donné des nouvelles de moi, car ç'aurait dû être pour moi un devoir que de vous rendre grâce des bontés que vous m'avez eues pendant mon séjour à Paris et de vous dire que je compte le temps que vous m'avez permis de passer avec vous parmi les moments les plus heureux de ma vie. Les distractions d'un long voyage et d'autres circonstances ayant interrompu le cours de mes travaux, je n'ai su reprendre sitôt le fil de mes recherches ordinaires; et j'étais trop accoutumé à vous parler Mathématiques et à vous raconter quelque chose de nouveau qui pouvait mériter votre indulgence, pour remplir une lettre avec les seuls sentiments de ma reconnaissance. Mais, après avoir reçu le cadeau précieux que vous venez de me faire par l'envoi de la troisième édition de votre Ouvrage sur les Nombres, je ne veux pousser plus loin un délai peu excusable. La partie la plus grande du tome II de votre Ouvrage étant entièrement nouvelle, j'ai eu occasion d'y admirer de nouveau cette vigueur d'esprit qui fait vaincre les difficultés et surpasser, même dans un âge avancé, les efforts des jeunes géomètres, auxquels votre vie glorieusement sacrée aux progrès de la science sera pour toujours un modèle d'émulation. J'ai vu aussi avec plaisir que vous avez voulu profiter de ma remarque relative à la loi de réciprocité. J'avais espéré de trouver, dans l'exemplaire que vous m'avez adressé, quelques lignes de votre main qui me parleraient de vous et de la santé de Mme Legendre; mais je l'ai feuilleté inutilement, et me voilà puni pour ma négligence assez sévèrement.

Pour ne pas laisser cette lettre sans les signes de calcul, je vais vous faire une observation relative à l'équation

$$4\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)=Y^2\pm nZ^2.$$

Pour trouver Y, votre Ouvrage donne la règle de développer

$$2(x-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

et de remplacer les coefficients par les *plus petits* résidus qu'ils laissent étant divisés par n. Cette règle, qui se trouve déjà dans la seconde édition, n'est cependant juste que pour des nombres premiers peu grands. Les valeurs exactes de Y et de Z sont données dans chaque cas par les formules connues qui expriment les coefficients d'une équation au moyen des sommes des puissances de ses racines, sommes qui, dans notre cas, sont ou $\frac{-1+\sqrt{\pm n}}{2}$ ou $\frac{-1-\sqrt{\pm n}}{2}$. C'est ainsi qu'on trouve qu'étant posé

$$\begin{aligned} Y &= 2(x-r)(x-r^4)(x-r^9)\ldots\left[x-r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\right] \\ &= 2x^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} + a_1 x^{\frac{n-3}{2}} + a_2 x^{\frac{1-5}{2}} + \ldots \text{ (1)}, \end{aligned}$$

la règle est exacte pour les trois premiers coefficients a_1, a_2, a_3, mais qu'elle cesse de l'être pour les suivants dès que n surpasse une certaine limite; de sorte que les coefficients de Y et de Z peuvent surpasser $\frac{1}{2}n$ et même n et les puissances de n. Soit, par exemple, n de l'une des quatre formes :

(1) $24\mu+1$, on aura (1) $a_4 = \frac{(n-1)(n-105)}{192} + n$,

(2) $24\mu+5$, (2) $a_4 = \frac{(n-5)(n-21)}{192}$,

(3) $24\mu+13$, (3) $a_4 = \frac{(n+3)(n+35)}{192}$,

(4) $24\mu+17$, (4) $a_4 = \frac{(n+7)(n+15)}{192}$,

expressions qui pour de grands n sont de l'ordre $\frac{n^2}{192}$, et peuvent surpasser n de beaucoup.

Généralement on trouve que, pour de grands n, a_{2m} et a_{2m+1} sont de l'ordre $\frac{1}{3.4.5\ldots 2m}\left(\frac{n}{4}\right)^m$. Peut-être vous jugerez conve-

---

(1) Il semble qu'une erreur s'est glissée dans cette formule, le produit qui forme la seconde partie n'étant pas égal au polynôme Y développé suivant les puissances de x dans la troisième partie de l'équation, mais bien égal à $Y+\sqrt{\pm n}.Z$. B.

nable de faire une addition de quelques lignes à votre Ouvrage pour limiter l'énoncé de la règle mentionnée.

J'ai lu avec plaisir le Rapport de M. Poisson sur mon Ouvrage, et je crois pouvoir en être très-content; il me paraît avoir très-bien présenté les deux transformations, qui, étant jointes entre elles, conduisent à la multiplication des fonctions elliptiques, en quoi il a été guidé sensiblement par vos Suppléments. Mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son Rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne pas nous être occupés de préférence du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des Mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la Science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde. Quoi qu'il en soit, on doit vivement regretter que M. Fourier n'ait pu achever son Ouvrage sur les équations, et de tels hommes sont trop rares aujourd'hui, même en France, pour qu'il soit facile de les remplacer.

En ce qui regarde mes propres occupations, j'ai entrepris un bon nombre de recherches sur différentes matières, et que je voudrais avoir finies avant de retourner aux fonctions elliptiques et aux transcendantes d'un ordre supérieur qui sont de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}}.$$

Je crois entrevoir à présent que toutes ces transcendantes jouissent des propriétés admirables et inattendues auxquelles on peut être conduit par le théorème d'Abel, qui établit une relation entre plusieurs de ces transcendantes qui répondent à différentes valeurs de x. J'ai réfléchi aussi de temps en temps sur une méthode nouvelle de traiter les perturbations célestes, méthode dans laquelle doivent entrer les théories nouvelles des fonctions elliptiques.

Je vous prie, monsieur, de me rappeler à la mémoire de Mme Legendre, qui a voulu participer avec tant de bienveillance aux bontés que vous m'avez eues; je vous prie en même temps de faire mes civilités à Mlle Sophie Germain, dont je me félicite d'avoir fait la

connaissance, et de me dire des nouvelles de sa santé, si vous daignez me répondre.

Agréez, monsieur, les assurances de mon entier dévouement.

Votre très-humble serviteur,

C.-G.-J. Jacobi.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 1er octobre 1830.

Monsieur,

Différents obstacles de toute nature, et principalement le mauvais état de ma santé, m'ont empêché jusqu'ici de répondre à votre lettre du 19 juillet, arrivée après un long silence qui commençait à m'inquiéter, et dont j'attribue la cause à de nouveaux travaux toujours marqués au coin d'un grand talent.

J'ai trouvé votre remarque très-juste sur l'erreur que j'ai commise dans ma Théorie des nombres, en supposant que les fonctions Y et Z dans l'équation $4X = Y^2 \pm nZ^2$ ont leurs coefficients plus petits que $\frac{1}{2}n$. L'induction m'a trompé, et cela est fâcheux, puisque la règle très-simple que j'avais donnée pour déterminer ces fonctions cesse d'être exacte lorsque $n = 61$, et devient de plus en plus fautive à mesure que n est plus grand. Vous paraissez avoir grandement approfondi cette question, comme j'en puis juger d'après les valeurs que vous donnez du cofficient a_4, selon les différentes formes du nombre premier $n = 4i + 1$. Je suis parvenu avec assez de peine à vérifier l'une de ces formules, celle qui suppose $n = 24\mu + 13$, ce qui me conduisit à la vérification des trois autres. Ce genre d'analyse est fort beau; c'est dommage seulement qu'il ne conduise pas à des formules absolument générales et que les résultats ne peuvent être trouvés commodément que dans des cas particuliers. De mon côté, je vous reprocherai de m'avoir induit en erreur, en me marquant que la fonction Y est le produit des facteurs

$$2(x - r)(x - r^4)(x - r^9)\ldots\left[x - r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\right],$$

r étant sans doute une racine imaginaire de l'équation $r^n - 1 = 0$. On voit, au premier coup d'œil, que ces facteurs ne peuvent avoir lieu, parce qu'ils seraient communs à X et à Y, par conséquent à Z.

J'ai vu avec plaisir, dans la lettre que vous avez écrite à l'Académie, que vous vous occupez à perfectionner la théorie des perturbations, et que vous avez l'espoir d'y employer utilement la théorie des fonctions elliptiques. C'est un objet très-digne de vos recherches, et qui a été fort négligé par nos devanciers; j'avais eu quelques idées là-dessus, mais sans rien approfondir; j'en ai fait mention dans mes *Exercices* et dans mon *Traité des fonctions elliptiques*, espérant qu'un jour les géomètres s'en occuperaient sérieusement, et une pareille entreprise ne saurait être mieux placée qu'entre vos mains.

M. Crelle est venu à Paris, précisément pour être témoin de notre révolution qui porte déjà des fruits, fruits amers pour les partisans des gouvernements absolus. Comme j'étais fort tourmenté de mes maux ordinaires dans ce même temps, j'ai eu le regret de ne pas recevoir M. Crelle et le fêter autant que j'aurais voulu. Je crois qu'il n'a pas été content de moi; vous auriez pu, monsieur, me faire un pareil reproche; car je n'ai pu, par la même cause, vous faire l'accueil que j'aurais voulu vous faire pendant votre voyage à Paris. Je me suis acquitté de votre commission auprès de ma femme et de Mlle Germain; elles vous remercient de votre bon souvenir, et vous souhaitent toute espèce de bonheur. — Mlle Germain était malade quand vous l'avez vue; son état a malheureusement fort empiré depuis.

Adieu, monsieur, ne me laissez pas trop longtemps sans me donner de vos nouvelles; je deviens chaque jour moins en état de travailler, mais j'apprends toujours avec grand plaisir les succès nouveaux que vous devez obtenir dans la carrière des sciences.

Votre très-dévoué,

LEGENDRE.

Jacobi à Legendre.

Königsberg, ce 27 mai 1832.

Monsieur,

Je ne sais comment excuser le long intervalle de temps qui s'est écoulé sans que je vous aie donné quelque témoignage de mon dévouement et sans que je vous aie rendu compte de mes travaux, comme j'avais coutume d'après votre permission bienveillante dans le premier temps où je m'occupais des fonctions elliptiques. J'aurais bien voulu pouvoir vous avertir de l'achèvement de quelque Ouvrage plus étendu, mais pendant tout ce temps-ci je n'ai pu regagner ni le goût ni l'énergie de jadis. Ce n'auraient été que des Ouvrages commencés ou même seulement projetés dont j'aurais dû faire mention à vous, qui ne cessez de publier des Ouvrages également distingués par leur étendue et par leur riche teneur, et cela presque dans l'âge où se trouvait Oughtred, lorsque Wallis lui dédia son *Arithmetica infinitorum*. J'ai lu le troisième Supplément qui finit le troisième volume de votre grand Ouvrage sur les *Fonctions elliptiques* à Potsdam, où je me suis rendu pour voir mon père malade, qui mourut huit jours après mon arrivée, à l'âge pas même accompli de cinquante-neuf ans. Je lui devais la reconnaissance la plus haute. Ce furent ses assistances libérales qui m'ont mis en état de me vouer entièrement aux sciences, et l'étendue de mes obligations envers lui me rendit ce triste événement plus amer encore. Dans ce temps d'une douleur profonde, monsieur, c'était l'étude de votre Ouvrage, qui m'a été communiqué par M. Crelle, qui fit mon soulagement et en quelque sorte ma consolation. Dans une annonce que j'en ai faite à la fin du huitième volume de M. Crelle, j'ai cherché à relever les mérites impérissables du géomètre qui, outre les découvertes nombreuses et importantes dont il a enrichi la science, est parvenu à fonder deux disciplines grandes et étendues par les travaux glorieux de sa vie, lesquelles formeront désormais l'α et l'ω de toute étude mathématique. J'ai profité en même temps de cette occasion pour parler d'Abel et de son grand théorème, que vous avez encore le mérite d'avoir approfondi le premier, et d'avoir montré à la postérité que son développement est la grande tâche qui lui reste à remplir.

Les limites d'une lettre ne permettent pas de vous parler de mes travaux sur les *Perturbations célestes*. En attendant, j'ai éprouvé moi-même des perturbations pas moins célestes et qui ont fini par un mariage heureux. L'intérêt que vous avez bien voulu me témoigner me fait croire que vous prendrez quelque part à ce qui fait le bonheur et le charme de ma vie. Depuis les huit mois de mon mariage j'ai repris mes occupations ordinaires avec un zèle redoublé, et j'espère que les années suivantes me dédommageront en quelque sorte du peu de fruit que m'ont porté les trois précédentes. Je ne veux vous dire que deux mots d'un nouveau résultat obtenu par mes recherches sur les Nombres, à la publication desquelles je n'ai encore pu parvenir : c'est la *résolution trigonométrique du problème de Pell*. En effet, j'exprime généralement par $\cos\frac{2m\pi}{a}$ et $\sin\frac{2m\pi}{a}$ deux nombres entiers x et y tels que $x^2 - ay^2 = 1$. J'ai trouvé même une généralisation du problème de Pell qui me paraît être très-remarquable et qui se rapporte au cas où a est le produit de deux ou de plusieurs facteurs. En effet, supposons que a soit le produit des deux facteurs b et c, on peut, d'une infinité de manières, trouver quatre nombres entiers u, v, w, x tels, que le produit des quatre facteurs

$$\begin{gathered}(u + v\sqrt{b} + w\sqrt{c} + x\sqrt{bc})(u + v\sqrt{b} - w\sqrt{c} - x\sqrt{bc})\\ \times(u - v\sqrt{b} + w\sqrt{c} + x\sqrt{bc})(u - v\sqrt{b} - w\sqrt{c} + x\sqrt{bc})\end{gathered}$$

soit égal à l'unité. On donne aisément à ce produit les trois formes : $y^2 - bz^2$, $y'^2 - cz'^2$, $y''^2 - az''^2$: donc, a étant $= bc$, on peut faire dépendre les six nombres y, z, y', z', y'', z'', lesquels donnent $y^2 - bz^2 = 1$, $y'^2 - cz'^2 = 1$, $y''^2 - az''^2 = 1$, des quatre nombres plus simples u, v, w, x. Vous voyez aisément comment cela doit être étendu au cas où a est le produit d'un nombre quelconque de facteurs. Dans tous les cas, je donne les nombres u, v, w, x, ... par des formules générales et trigonométriques. Si vous le jugez convenable, et s'il ne vous fait pas de peine en aucune sorte, vous pourriez communiquer à l'Académie des Sciences la Notice que je viens de vous donner sur cette nouvelle manière de résoudre le fameux problème de Pell. Je remarque, en outre, qu'il doit exister des algorithmes, analogues aux fractions continues, qui pourront

servir à trouver les nombres u, v, w, x et leurs analogues dans le cas d'un plus grand nombre de facteurs de a, et je crois que la recherche de ces algorithmes sera une chose de quelque importance pour la science des nombres.

Les fonctions elliptiques et la science des nombres ne devraient pas manquer à l'avenir dans les leçons données aux élèves de l'École Polytechnique, si l'on veut que ces leçons soient conformes aux progrès du temps. Quant à moi, je donne des leçons régulières sur ces belles théories, et je vois avec plaisir les élèves de notre Université s'emparer avec empressement de ces matières. Vous verrez plusieurs fruits de leurs travaux dans les volumes suivants du *Journal de M. Crelle*. Ce sont encore, monsieur, les fruits de vos travaux que ces branches de la Science, jadis peu connues, vont devenir la possession commune des géomètres.

De mon retour à Königsberg, j'y trouvai votre bel Ouvrage dont votre bonté a bien voulu me gratifier, et je m'empresse de vous dire mes remercîments de ce que votre générosité l'a voulu emporter sur ma négligence. Ajoutez, monsieur, à cette générosité quelques lignes de votre main, qui m'ont toujours été si précieuses et qui pourront me donner l'assurance de ce que vous n'êtes pas fâché de moi.

Je vous prie, Monsieur, de recommander Marie Jacobi aux bonnes grâces de Mme Legendre, et de vouloir bien agréer les assurances de mon dévouement le plus parfait.

Votre serviteur très-humble,

C.-G.-J. Jacobi.

Legendre à Jacobi.

(Sans date, timbré Paris, 30 juin 1832.)

Monsieur,

Je n'ai jamais interprété à votre désavantage la longue lacune qui s'est trouvée dans votre correspondance : j'ai supposé que vous étiez occupé d'un grand travail qui absorbait tout votre temps, ou que des affaires essentielles vous empêchaient de penser à autre chose. Les deux suppositions paraissent avoir eu lieu successive-

ment; c'est en effet une grande époque dans la vie que celle où l'on a le malheur de perdre son père, c'en est une autre non moins importante, mais plus agréable, que celle où l'on se décide à entrer en ménage. Et, pour ne parler que de cette dernière, je vous félicite bien sincèrement d'avoir rencontré une jeune épouse que, d'après une expérience *déjà longue,* vous jugez devoir faire pour toujours votre bonheur.

Vous étiez dans l'âge convenable pour vous marier; un homme destiné à passer beaucoup de temps dans les travaux du cabinet a besoin d'une compagne qui s'occupe de tout le détail du ménage et qui affranchisse son mari de tous ces petits soins minutieux dont un homme n'est guère capable. Je me suis marié beaucoup plus tard que vous et à la suite d'une révolution sanglante qui avait détruit ma petite fortune; nous avons eu de grands embarras et des moments bien difficiles à passer; mais ma femme m'a aidé puissamment à restaurer progressivement mes affaires et à me donner cette tranquillité d'esprit nécessaire pour me livrer à mes travaux accoutumés et pour composer de nouveaux Ouvrages qui ont ajouté de plus en plus à ma réputation, de manière à me procurer bientôt une existence honorable et une petite fortune dont les débris, après de nouvelles révolutions qui m'ont causé de grandes pertes, suffisent encore pour pourvoir aux besoins de ma vieillesse, et suffiront pour pourvoir à ceux de ma femme bienaimée quand je n'y serai plus. Mais c'est trop parler de moi. Je reviens à vous et à votre lettre.

Je n'ai pas trouvé l'occasion de parler à l'Académie de vos travaux sur l'Analyse indéterminée; peut-être n'en parlerai-je pas, dans la crainte de n'être pas suffisamment entendu. J'obtiendrais plus de faveur si j'avais à parler à l'Académie des travaux dont vous vous occupez sur la théorie des perturbations. C'est un objet d'un grand intérêt auquel j'ai pensé plusieurs fois, et sur lequel j'ai donné par-ci par-là quelques idées; je me suis toujours persuadé que, si je m'en étais occupé sérieusement et d'une manière suivie, j'aurais trouvé quelque chose de plus que mes honorables confrères Lagrange et Laplace. Si on excepte, en effet, les beaux résultats qu'ils ont trouvés pour les différentielles des éléments elliptiques exprimées par la fonction des perturbations, je ne vois pas qu'ils aient avancé la Science au delà de ce qu'elle était du temps d'Euler, Clairaut et d'Alembert. Je verrais donc avec beaucoup de plaisir,

mon cher disciple (car vous me permettrez de vous donner ce nom à raison de mon ancienneté, sauf à vous à user du même droit un jour, envers qui il appartiendra), que vous ouvrissiez dans cette théorie *une nouvelle porte* qui nous conduisît à des résultats plus précis et plus exacts que tout ce qui a été fait jusqu'ici. J'aurais un double plaisir si ces nouveaux résultats étaient obtenus par le secours de *nos* fonctions elliptiques, qui vous appartiennent autant qu'à moi, quoique vous ne vouliez pas exprimer la même chose par le même nom.

Je ne puis voir ma page finir sans vous remercier de la peine que vous avez prise de donner dans le *Journal de M. Crelle* un extrait de mon troisième Supplément. Je n'ai pas le bonheur d'entendre la langue dont vous vous êtes servi, mais je sais que vous avez dit beaucoup de bien de mon nouveau travail qui sera sans doute le dernier; car je vais bientôt entrer dans ma 81[e] année, et, à cet âge, il faut s'appliquer forcément l'adage *solve senescentem*. En attendant je vous envoie un petit opuscule de Géométrie élémentaire, qui est le résultat d'une longue suite de réflexions faites et renouvelées à de grands intervalles de temps. Peut-être ce petit opuscule trouvera-t-il plus de lecteurs que mes meilleurs Ouvrages; mais s'il a votre approbation, cela me suffit.

Agréez, monsieur, l'expression des sentiments d'estime et d'attachement bien sincère que je vous ai voués pour toujours. Ma femme vous fait mille compliments ainsi qu'à votre aimable épouse. Elle désire, ainsi que moi, que vous nous l'ameniez quelque jour.

Votre dévoué serviteur,

LEGENDRE.

SUR QUELQUES SURFACES A COURBURE CONSTANTE;

PAR M. N. NICOLAÏDÈS.

Je représente par a la première courbure absolue de l'un des systèmes des lignes de courbure d'une surface, et par b celle du second système. Si a et b sont constants pour tous les points de la surface, elle sera à courbure constante, c'est-à-dire que le produit des deux courbures principales sera constant pour tous ses points.

On peut démontrer cette proposition en se servant des équations fondamentales; on a

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial.\mathrm{EG}}{\partial u_1} - \dfrac{\partial.\mathrm{E_1G_1}}{\partial u} = \mathrm{EE_1HH_1}, \\ \dfrac{\partial.\mathrm{EH}}{\partial u_1} = \mathrm{H_1}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u_1}, \quad \dfrac{\partial.\mathrm{E_1H_1}}{\partial u} = \mathrm{H}\dfrac{\partial \mathrm{E_1}}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u_1} = -\mathrm{EE_1G}, \quad \dfrac{\partial \mathrm{E_1}}{\partial u} = \mathrm{EE_1G_1}. \end{cases}$$

H, H_1 sont les courbures normales des lignes de courbure; G, G_1 les courbures géodésiques, et E, E_1 les coefficients qui figurent dans l'expression de l'arc.

On a, par hypothèse,

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{G}^2 + \mathrm{H}^2 = a^2, \\ \mathrm{G}_1^2 + \mathrm{H}_1^2 = b^2, \end{cases}$$

d'où

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{EG}\dfrac{\partial.\mathrm{EG}}{\partial u_1} + \mathrm{EH}\dfrac{\partial.\mathrm{EH}}{\partial u_1} = a^2\mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u_1}, \\ \mathrm{E_1G_1}\dfrac{\partial.\mathrm{E_1G_1}}{\partial u} + \mathrm{E_1H_1}\dfrac{\partial.\mathrm{E_1H_1}}{\partial u} = b^2\mathrm{E_1}\dfrac{\partial \mathrm{E_1}}{\partial u}; \end{cases}$$

d'où, en ayant égard aux équations (1),

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial.\mathrm{EG}}{\partial u_1} - \mathrm{EE_1HH_1} = -a^2\mathrm{EE_1}. \\ \dfrac{\partial.\mathrm{E_1G_1}}{\partial u} + \mathrm{EE_1HH_1} = b^2\mathrm{EE_1}; \end{cases}$$

par conséquent,

$$\frac{\partial.\mathrm{EG}}{\partial u_1} - \frac{\partial.\mathrm{E_1G_1}}{\partial u} = (2\mathrm{HH_1} - a^2 - b^2)\mathrm{EE_1},$$

c'est-à-dire (1)

$$(5)\quad \mathrm{HH_1} = a^2 + b^2;$$

a et b étant constants par hypothèse, il s'ensuit que HH_1, c'est-à-dire le produit des deux courbures principales de la surface, est aussi constant.

Il est à remarquer que l'intégration des équations fondamentales s'achève aisément dans ce cas particulier. En effet, en combinant les équations (3) et (1), on obtient

$$\mathrm{EG}\,\frac{\partial.\mathrm{EG}}{\partial u_1} = -\,b^2\,\mathrm{E}\,\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u_1},$$

$$\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1\,\frac{\partial.\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1}{\partial u} = -\,a^2\,\mathrm{E}_1\,\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial u},$$

d'où

$$\mathrm{E}^2\mathrm{G}^2 + b^2\mathrm{E}^2 = \mathrm{U},$$

$$\mathrm{E}_1^2\mathrm{G}_1^2 + a^2\mathrm{E}^2 = \mathrm{U}_1,$$

U, U_1 étant deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de u_1. Mais on peut prendre ces fonctions égales à l'unité, en espaçant convenablement les lignes du réseau; les équations précédentes deviennent, par conséquent,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{G}^2 + b^2 = \frac{1}{\mathrm{E}^2},\\ &\mathrm{G}_1^2 + a^2 = \frac{1}{\mathrm{E}_1^2},\end{aligned}\right.$$

et encore, (2) et (5),

$$(7)\qquad \mathrm{E}^2 + \mathrm{E}_1^2 = \frac{1}{a^2 + b^2};$$

enfin, en combinant ces trois dernières équations avec les deux dernières (1), on obtient les valeurs de E, E_1; on a

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &f - u_1 = \int \frac{\sqrt{a^2+b^2}\,d\mathrm{E}}{\sqrt{1-b^2\mathrm{E}^2}\,\sqrt{1-(a^2+b^2)\,\mathrm{E}^2}},\\ &f_1 + u = \int \frac{\sqrt{a^2+b^2}\,d\mathrm{E}_1}{\sqrt{1-a^2\mathrm{E}_1^2}\,\sqrt{1-(a^2+b^2)\,\mathrm{E}_1^2}},\end{aligned}\right.$$

f et f_1 étant deux fonctions arbitraires qui seront déterminées par la condition (6). D'ailleurs, les valeurs de E et E_1, substituées dans les équations (2) et (5), donneront celles de H, H_1, G, G_1.

Nous avons à communiquer à nos lecteurs une douloureuse nouvelle. Un de nos collaborateurs les plus zélés et les plus éminents, M. Painvin, s'est éteint le 12 octobre dernier dans sa cinquantième année, après une longue et cruelle maladie. Les géomètres connaissent depuis longtemps les beaux travaux qu'il a publiés en si grand nombre; nos professeurs appréciaient et étudiaient les excellentes leçons de Géométrie analytique qui reproduisaient et développaient la matière de son enseignement. Il appartient à ceux d'entre nous qui l'aimaient et le voyaient de près de rendre justice à ses belles qualités morales, à son ardeur infatigable au travail, à la loyauté qu'il apportait dans toutes ses relations, au soin jaloux avec lequel il s'occupait de ses élèves et travaillait constamment à développer leurs aptitudes mathématiques.

La Géométrie analytique, l'Algèbre moderne étaient les objets favoris de ses études, le but principal de ses efforts. L'un des premiers en France, il a cultivé cette branche de l'Analyse qui est devenue presque l'unique sujet d'études des jeunes savants français. Nous avons formé avec soin et l'on trouvera plus loin la liste des Ouvrages de notre collaborateur; elle ferait honneur même à un géomètre qui n'aurait pas eu à concilier ses études personnelles avec les travaux d'un enseignement des plus pénibles.

Apprécié de tous, notre excellent ami avait obtenu, l'année dernière, la récompense de ses efforts : il venait d'être appelé à professer à la Faculté des Sciences; la maladie ne lui a pas permis de terminer son premier Cours.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

KÖNIGSBERGER, Professor an der Universität zu Heidelberg. — VORLESUNGEN ÜBER DIE THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN, nebst einer Einleitung in die allgemeine Functionenlehre. In-8. — Leipzig, Teubner, 1874. Erster Theil, 431 S. Zweiter Theil, 219 S. — Prix : 28 fr. 75 c.

M. Königsberger était déjà connu des géomètres par la publication de plusieurs Mémoires et d'un Ouvrage didactique sur les fonctions ϑ. Il nous donne aujourd'hui la reproduction des Leçons qu'il a faites dans ces dernières années sur la théorie des fonctions ellip-

tiques à l'Université de Heidelberg. L'étendue considérable de cette nouvelle publication, qui ne comprend pas moins de 600 pages, et le plan suivi par l'auteur recommandent ce nouveau Traité à l'attention la plus sérieuse de nos lecteurs, et nous engagent à en faire connaître une analyse détaillée.

Ce qui distingue les Leçons de M. Königsberger des ouvrages du même genre, et en particulier du beau Traité de MM. Briot et Bouquet, c'est l'emploi systématique de la méthode que Riemann a instituée pour l'étude des fonctions de variables complexes. Les avis sont partagés, on le sait, même en Allemagne, au sujet de cette méthode. On peut penser que, si elle offre quelques avantages dans certaines questions difficiles, elle ne se montre nullement supérieure à celle de Cauchy et de ses disciples dans l'étude des fonctions elliptiques. Nous n'avons pas à émettre une opinion sur un point qui divise tant de bons esprits, et nous devons être reconnaissants à M. Königsberger de nous donner une idée aussi claire que possible des méthodes de son illustre maître et des applications qu'elles comportent dans cette vaste théorie des fonctions elliptiques.

Les *Leçons sur les fonctions elliptiques* peuvent être divisées en trois Parties bien distinctes :

La première, qui comprend les Leçons I à XII, contient les bases de la théorie générale des fonctions.

Après avoir donné les règles de calcul et la représentation des variables imaginaires, la définition des fonctions de ces variables et leur classification en fonctions à une seule ou à plusieurs valeurs pour une même valeur de la variable indépendante, l'auteur aborde la considération des surfaces de Riemann. Une Leçon est consacrée à la distinction des surfaces continues en surfaces à connexion simple ou multiple, et à la réduction de toute surface à une surface à connexion simple par l'emploi des sections (*Querschnitte*). Les Leçons suivantes sont consacrées aux intégrales des fonctions de variables complexes, aux séries de Taylor et de Maclaurin, à l'étude des fonctions algébriques du logarithme et de la fonction exponentielle, des intégrales trigonométriques et elliptiques, à la représentation des fonctions par des produits infinis. Cette première portion, qui comprend environ 240 pages, peut donc être considérée comme un exposé succinct, dans la voie de Riemann, de la théorie générale

des fonctions. L'exposition nous a paru très-satisfaisante; mais il nous semble que cette théorie générale est celle qui offrira le plus de difficultés à la lecture.

La deuxième Partie de l'Ouvrage traite des intégrales elliptiques et de leur inversion. Après avoir séparé en trois classes les intégrales elliptiques, et les avoir ramenées à leurs formes normales, l'auteur consacre toute une Leçon à l'étude des relations si intéressantes qui existent entre les périodes des intégrales de diverses espèces. La seizième Leçon est consacrée à l'inversion et à la définition des fonctions ϑ; la dix-septième aux fonctions périodiques considérées d'une manière générale. Les trois Leçons suivantes contiennent les propriétés principales des fonctions ϑ, des fonctions et des intégrales elliptiques, en particulier le théorème de l'addition pour les intégrales normales des trois espèces. Enfin la vingt et unième Leçon est consacrée au théorème d'Abel, qui est exposé sous la forme particulière qu'Abel a déjà fait connaître, mais avec des développements qui en donnent le sens précis.

La dernière division que nous établirions dans l'Ouvrage se composerait des dix dernières Leçons, qui occupent 200 pages et qui traitent surtout de la transformation.

L'auteur se pose le problème de la transformation sous la forme générale qu'Abel lui a donnée, et il montre que l'étude de cette question générale se ramène à celle de la transformation rationnelle, qu'il étudie en prenant pour bases les fonctions ϑ. Nous citerons la vingt-cinquième Leçon, consacrée aux fonctions de M. Weierstrass; la vingt-septième, qui traite des fonctions φ de M. Hermite; la vingt-huitième et la vingt-neuvième, qui traitent des équations modulaires et des équations au multiplicateur. Enfin les deux dernières Leçons traitent de la multiplication et de la division des fonctions elliptiques.

Les méthodes par lesquelles on aborde la théorie des fonctions elliptiques sont si différentes qu'il y aurait une injustice évidente à reprocher à l'auteur de ne pas les avoir fait toutes connaître; mais on a dû voir, par la rapide analyse qui précède, que nous sommes en présence d'un Ouvrage bien ordonné, où tout s'enchaîne, où tout est démontré, où l'on admet seulement chez le lecteur la connaissance des principes du Calcul infinitésimal. G. D.

HENNEBERG (L.). — UEBER SOLCHE MINIMALFLÄCHEN, WELCHE EINE VORGESCHRIEBENE EBENE CURVE ZUR GEODÄTISCHEN LINIE HABEN. — Weitere Ausführung einer von der eidgenössischen polytechnischen Schule als Preisschrift gekrönten und hierauf der hohen philosophischen Facultät der Universität Heidelberg zur Erlangung der Doctorwürde überreichten Abhandlung. — Zürich. Zürcher und Furrer, 1875. In-8°, 68. S. [1].

La question dont s'occupe un jeune géomètre, M. Henneberg, dans l'Opuscule dont nous venons de citer le titre, et qui a été couronné en même temps qu'un travail de M. Herzog sur le même sujet, est comprise comme cas particulier dans une de celles qui ont été traitées par M. O. Bonnet dans son beau Mémoire : *Sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes* [2]. Dans ce travail très-étendu, M. Bonnet s'est occupé des surfaces minima, et il a résolu le problème suivant : « Construire la surface minimum qui passe par une courbe donnée, et pour laquelle on connaît la direction de la normale en un point quelconque de cette courbe. » Il remarque, en outre, que la solution de ce problème général comprend celle des cinq questions suivantes : Déterminer une surface minimum, connaissant : 1° une ligne géodésique ; 2° une ligne de courbure ; 3° une ligne asymptotique ; 4° une ligne d'ombre ; 5° une ligne de perspective, et il indique deux applications particulièrement intéressantes de sa solution générale.

Le problème proposé aux élèves de l'École Polytechnique de Zurich était beaucoup moins étendu, mais plus précis. Il s'agissait de déterminer une surface minimum, sachant qu'elle admet pour ligne géodésique une ligne plane donnée.

M. Henneberg a résolu fort élégamment le problème. Il se sert des belles formules de M. Weierstrass, et montre comment on peut en déduire une solution générale de la question proposée, solution qu'il applique ensuite à différents exemples particuliers. C'est ainsi qu'il traite d'une manière détaillée le cas où la ligne plane est une ellipse ou une hyperbole, une parabole de Neill, etc. Les méthodes synthétiques des géomètres français paraissent être bien connues de

---

[1] HENNEBERG (L.) — *Sur les surfaces minima qui admettent pour ligne géodésique une ligne plane donnée, etc.*

[2] *Journal de Liouville*, t. V, 2e série, p. 153.

l'auteur, qui les emploie pour la démonstration d'élégants théorèmes. Nous citerons seulement la proposition suivante :

« Quand une ligne plane est la développée d'une courbe algébrique, la surface minimum dont elle est la ligne géodésique est elle-même algébrique. » G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ([1]).

T. LXXX; 1er semestre 1875 (suite).

N° 16. Séance du 26 avril 1875.

FAYE. — *Sur les ascensions à grande hauteur.*

LEDIEU (A.). — *Du cycle fictif correspondant au fonctionnement des machines thermiques à cylindre ouvert, et mise en évidence de ce cycle et du poids de substance motrice formant le corps travailleur.*

SALTEL (L.). — *Sur une extension analytique du principe de correspondance de M. Chasles.*

« Dans son Mémoire intitulé : *Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique,* l'auteur a montré comment la détermination de ce nombre résulte immédiatement de la solution de ce problème :

» Une droite Δ contient un point O pris pour origine et deux séries de points S_1, S_2, dont la liaison est telle que, prenant arbitrairement un point Q à une distance du point O représentée par ρ_1 ou ρ_2, il corresponde pour l'autre série un nombre constant de points α_2 ou α_1. On demande le nombre N de points P situés *à distance finie,* tels que, supposant confondu en l'un d'eux un point de l'une des deux séries, ce point coïncide avec l'un des points correspondants de l'autre série. »

([1]) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 114.

Un Mémoire auquel l'auteur donne le nom de *principe de correspondance analytique* permet de résoudre cette question dans un grand nombre de cas.

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Sur les courbes d'ordre n à point multiple d'ordre $n-1$.*

GYLDÉN (H.). — *Sur le développement de la fonction perturbatrice suivant les multiples d'une intégrale elliptique.*

PESLIN (H.). — *Sur la loi des variations diurnes et annuelles de la température dans le sol.*

COUSTÉ. — *Note sur la théorie des tempêtes.*

N° 17. Séance du 3 mai 1875.

PERROTIN. — *Note comprenant les éléments et une éphéméride de la planète (138) Tolosa.*

PALISA. — *Éléments de la planète (143) Adria.*

GALLE. — *Lettre touchant la détermination de la parallaxe solaire par les observations de la planète Flora.*

FOURET (G.). — *Sur une nouvelle définition géométrique des courbes d'ordre n à point multiple d'ordre $n-1$.*

Cette Note traite du même sujet que la Communication déjà citée de M. Niewenglowski.

« Considérons une conique C, un point fixe O sur cette conique, et $n-2$ droites D distribuées d'une manière quelconque dans son plan. Sur chaque transversale passant par O construisons, à partir de ce point, un rayon vecteur qui soit la somme algébrique des rayons vecteurs déterminés sur la transversale par la conique C et par les droites D. Le lieu des points obtenus est une courbe d'ordre n, à point multiple d'ordre $n-1$ en O, et ayant pour asymptotes les deux asymptotes de la conique et les $n-2$ droites D.

» La réciproque de ce théorème est surtout remarquable. Elle consiste, ainsi que M. Niewenglowski l'a établi, en ce que toute courbe d'ordre n, ayant un point multiple d'ordre $n-1$, est susceptible d'un pareil mode de génération. »

L'auteur présente quelques remarques sur cette proposition et d'autres analogues. Un procédé de démonstration qui ne se trouve

ni dans cette Communication, ni dans celle de M. Niewenglowski, nous paraît susceptible de conduire à ces théorèmes et à plusieurs autres analogues.

L'équation de toute courbe d'ordre n ayant un point double d'ordre $n - 1$ peut prendre en coordonnées polaires la forme

$$\rho = \frac{1}{\cos\omega} f(\tang\omega),$$

le symbole f désignant une fonction rationnelle de $\tang\omega$. D'après la théorie connue de la décomposition de ces fonctions, la valeur de ρ pourra prendre la forme

$$\rho = \sum \frac{1}{\cos\omega(a + b\tang\omega)} = \sum \frac{1}{a\cos\omega + b\sin\omega},$$

ce qui conduit aux propositions déjà citées, et montre qu'elles cesseraient d'avoir lieu dans le cas où la fonction f admettrait des infinis multiples.

Jordan (C.). — *Théorème sur les covariants.*

« Soient A_n, B_n, ... des formes binaires d'ordre n, en nombre quelconque; A_{n-1}, B_{n-1}, ... des formes d'ordre $n - 1$, etc. Soient enfin C un covariant du système de ces formes; O l'ordre de C par rapport aux variables; d_n son degré total par rapport aux coefficients de A_n, B_n, ...; d_{n-1} son degré par rapport aux coefficients de A_{n-1}, B_{n-1}, etc. On aura le théorème suivant : Si le covariant C n'est pas exprimable en fonction entière de covariants plus simples, on aura nécessairement, pour limiter O, d_n, d_{n-1}, ..., les inégalités suivantes :

$$O < S, \quad p_n d_n + p_{n-1} d_{n-1} + \ldots < 2S\left(\frac{p_n}{n} + \frac{p_{n-1}}{n-1}, + \ldots + \frac{p_1}{1}\right),$$

S désignant l'expression

$$n\sqrt{6n} + (n-1)\sqrt{6(n-1)} + \ldots + \sqrt{6},$$

et p_n, p_{n-1}, ..., p_1 étant des constantes déterminées de proche en proche au moyen des relations suivantes :

$$p_1 = 1, \quad p_{2\mu} \geqq 2p_{2\mu+1}, \quad p_{2\mu-1} > \frac{3}{2} p_{2\mu}, \quad p_\mu > \frac{9}{2} S \frac{p_{2\mu}}{2\mu}.$$

On en conclut immédiatement que, si les formes A_n, $B_n, \ldots, A_{n-1}, \ldots$ sont en nombre limité, le nombre des covariants indépendants C sera limité, proposition fondamentale découverte par M. Gordan. »

FONVIELLE (W. DE). — *Note sur une ascension aérostatique.*

N° 18. Séance du 10 mai 1875.

RESAL (H.). — *Sur la substitution par approximation entre des limites déterminées du rapport des variables d'une fonction homogène de deux variables à une autre fonction homogène du même degré.*

« Soit F (x, y) une fonction homogène de x, y du degré m; l'auteur se propose de déterminer deux coefficients indéterminés α, β d'une fonction homogène du même degré $F_1(x, y)$, de manière que les erreurs relatives

$$e = \frac{F(x, y)}{F_1(x, y)} - 1$$

se trouvent partagées dans les meilleures conditions entre les limites supérieure k_2 et inférieure k_1 du rapport $\frac{y}{x}$. »

Ce problème est posé en termes un peu vagues. M. Resal propose la solution suivante :

« Exprimer que les deux erreurs relatives extrêmes sont égales et de même signe, et égales et de signes contraires au maximum ou au minimum que prend la fonction e dans l'intervalle considéré. »

C'est cette solution qu'il applique à différents exemples :

1° $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $F_1(x, y) = \alpha y + \beta z$, déjà traité par Poncelet;

2° $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $F_1(x, y) = \frac{1}{\alpha y + \beta z}$.

FAYE. — *Lettre sur la distribution de la température à la surface du Soleil et les récentes mesures de M. Langley.*

TRESCA. — *Locomotive à patins de M. Fortin-Hermann.*

LEDIEU (A.). — *Sur la loi de détente pratique dans les machines à vapeur.*

FLEURIAIS. — *Documents recueillis par la mission envoyée à Pékin pour observer le passage de Vénus.*

MATHIEU (É.). — *Mémoire sur des formules de perturbation* [1].

LAGUERRE. — *Sur quelques propriétés des courbes algébriques.*

Nous énonçons les trois théorèmes principaux de cette Communication.

Si d'un point M, pris dans le plan d'une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe $K^n = C^{n(n-1)}$, on mène les n tangentes à la courbe, et si l'on considère les $\frac{n(n-1)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les points de contact, la droite polaire de M relative à $C^{n(n-1)}$ est la droite polaire du même point relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ droites considérées.

Étant donnée une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe et de $m^{\text{ième}}$ ordre $K^n = C^m$, possédant t tangentes doubles et i tangentes d'inflexion, si l'on désigne respectivement par D, I, T et Δ les droites polaires d'un point M du plan relativement à la courbe C^m, à l'ensemble des tangentes doubles, à l'ensemble des tangentes d'inflexion et à l'ensemble des droites qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes menées du point M à K^n, la droite Δ est la polaire du point M par rapport au triangle formé par les droites D, T, I, ces droites étant supposées de poids proportionnels aux nombres m, $2t$, $3i$.

Étant données deux courbes quelconques de classes n et n', K^n, $K^{n'}$, la droite polaire d'un point quelconque M du plan relativement à leurs nn' tangentes communes est la droite polaire du même point relativement aux nn' droites qui joignent les points de contact des tangentes menées de M à K^n aux points de contact des tangentes menées de M à $K^{n'}$.

PESLIN (H.). — *Théorie des tempêtes. Réponse à M. Faye.*

ABBADIE (A. d'). — *Note accompagnant la présentation des premiers résultats des observations sur les mouvements microscopiques des pendules librement suspendus.*

N° 19. Séance du 17 mai 1875.

LE VERRIER (U.-J.). — *Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par*

---

[1] Voir *Bulletin*, t. IX, p. 125.

l'Astronome Royal M. Airy) et à l'Observatoire de Paris pendant le premier trimestre de l'année 1875.

Ellery (R.). — *Observations de la Lune et d'étoiles de même culmination, faites à l'Observatoire de Melbourne.*

Fonvielle (W. de). — *Sur les précautions à prendre dans les ascensions en hauteur.*

N° 20. Séance du 24 mai 1875.

Le Verrier (U.-J.). — *Observations de la Lune faites aux instruments méridiens de l'Observatoire de Paris pendant l'année* 1874.

Faye. — *Quelques remarques sur la discussion au sujet des cyclones.*

Secchi (le P.). — *Étude des taches et des protubérances solaires de* 1871 *à* 1875.

Ledieu (A.). — *Conditions du maximum de rendement calorifique des machines à feu.*

André (Ch.). — *Sur les documents scientifiques recueillis à Nouméa par la mission envoyée pour observer le passage de Vénus.*

Saltel (L.). — *Sur la détermination des singularités de la courbe gauche, intersection de deux surfaces d'ordres quelconques qui ont en commun un certain nombre de points multiples.*

L'auteur énonce un lemme relatif aux points multiples, et il en déduit, pour quelques cas particuliers, la solution du problème qu'il s'est posé.

N° 21. Séance du 31 mai 1875.

Saltel (L.). — *Sur les courbes gauches de genre zéro.*

Cette Communication repose sur ce théorème général que toutes les courbes gauches pour lesquelles s'applique le principe de correspondance entre trois et quatre séries de points sont du genre zéro.

N° 22. Séance du 7 juin 1875.

Reech (F.). — *Théorie des surfaces de révolution qui, par voie de déformation, sont superposables les unes aux autres et chacune à elle-même en toutes ses parties.*

Un extrait de ce travail est inséré dans les *Comptes rendus*. Les propositions énoncées, et dont l'auteur est, croyons-nous, en possession depuis longtemps, ont perdu de leur nouveauté; car l'étude des surfaces de M. Reech se relie aux innombrables travaux que ces dernières années ont vu paraître sur le *Postulatum d'Euclide*.

Mouchez. — *Position géographique de l'île Saint-Paul.*

N° 23. Séance du 14 juin 1875.

Le Verrier (U.-J.). — *Découvertes des petites planètes* (144) *et* (145), *faites à Clinton (New-York) par M. Peters.*

Le Verrier (U.-J.). — *Découverte de la petite planète* (146), *faite à Marseille par M. Borrelly.*

Faye. — *Sur la trombe de Caen.*

Reech (F.). — *Théorie des surfaces de révolution qui, par voie de déformation, sont superposables les unes aux autres et chacune à elle-même dans toutes ses parties.*

N° 24. Séance publique annuelle du lundi 21 juin 1875.

Prix proposés :

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

« *Etude de l'élasticité des corps cristallisés, au double point de vue expérimental et théorique.* »

La Commission chargée de l'examen de ce Concours ayant déclaré qu'il n'y avait pas lieu de décerner de prix, l'Académie a décidé, sur sa proposition, qu'elle en prorogerait le terme à l'année 1875.

Les Mémoires ont dû être déposés au Secrétariat avant le 1er juin.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

La question remise au Concours, pour 1869, a été prorogée à 1873, dans les termes suivants :

« *Discuter complétement les anciennes observations d'éclipse qui nous ont été transmises par l'histoire, en vue d'en déduire la valeur de l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune, sans se préoccuper d'aucune valeur théorique de cette accélération séculaire; montrer clairement à quelles conséquences ces éclipses peuvent conduire relativement à l'accélération dont il s'agit, soit en lui assignant forcément une valeur précise, soit au contraire en la laissant indéterminée entre certaines limites.* »

Aucun Mémoire n'est parvenu pour le Concours.

En raison de l'importance de la question, la Commission a proposé de proroger le Concours jusqu'en 1876, en formulant ainsi le travail proposé :

« *Déduire d'une discussion nouvelle, approfondie, des anciennes observations d'éclipses, la valeur de l'accélération séculaire apparente du moyen mouvement de la Lune. Fixer les limites de l'exactitude que comporte cette détermination.* »

Les Mémoires seront reçus jusqu'au 1er juin 1876. Les noms des auteurs seront contenus dans un pli cacheté, qui ne sera ouvert que si le Mémoire qui le renferme est couronné.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

« *Théorie des solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* »

Les Ouvrages présentés devront être écrits en français ou en latin.

Le terme fixé pour le dépôt des pièces de Concours est le 1er juin 1876.

Le prix consistera en une médaille de la valeur de *trois mille francs*.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

La question proposée était l'*étude des équations relatives à la détermination des modules singuliers, pour lesquels la formule de la transformation dans la théorie des fonctions elliptiques conduit à la multiplication complexe.*

Aucun Mémoire n'ayant été envoyé au Concours, la Commission est d'avis qu'il y a lieu de retirer la question et de la remplacer par la suivante :

« *Application de la théorie des transcendantes elliptiques ou abéliennes à l'étude des courbes algébriques.* »

Le prix, à décerner en 1877, consistera en une médaille de la valeur de *trois mille francs.*

Les Mémoires seront reçus jusqu'au 1er juin 1877. Les noms des auteurs seront contenus dans un pli cacheté, qui ne sera ouvert que si le Mémoire qui le renferme est couronné.

PRIX LALANDE.

La médaille fondée par M. de Lalande, pour être accordée *annuellement* à la personne qui, en France ou ailleurs, aura fait l'observation la plus intéressante, le Mémoire ou le travail le plus utile au progrès de l'Astronomie, sera décernée dans la prochaine séance publique.

Ce Prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *cinq cent quarante-deux francs.*

PRIX DAMOISEAU.

L'Académie avait proposé pour sujet du prix Damoiseau à décerner en 1872 la question suivante :

« *Revoir la théorie des satellites de Jupiter; discuter les observations et en déduire les constantes qu'elle renferme, et particulièrement celle qui fournit une détermination directe de la vitesse de la lumière; enfin construire des Tables particulières pour chaque satellite.* »

Aucun Mémoire n'ayant été déposé au Secrétariat, elle a prorogé le Concours à l'année 1876.

La Commission invite les concurrents à donner une attention particulière à l'une des conditions du prix de M. le baron de Damoiseau, celle qui est relative à la détermination de la vitesse de la lumière.

Les Mémoires seront reçus jusqu'au 1er juin.

PRIX VAILLANT.

M. le Maréchal Vaillant, Membre de l'Institut, a légué à l'Académie des Sciences, par son testament en date du 1er février 1872, une somme de *quarante mille francs,* destinée à fonder un prix qui sera décerné soit annuellement, soit à de plus longs intervalles. « Je n'indique aucun sujet pour le prix », dit M. le Maréchal Vaillant, » ayant toujours pensé laisser une grande Société comme l'Académie des Sciences appréciatrice suprême de ce qu'il y avait de mieux à faire avec les fonds mis à sa disposition. »

L'Académie, autorisée par Décret du 7 avril 1873 à accepter ce legs, a décidé que le prix fondé par M. le Maréchal Vaillant serait décerné *tous les deux ans.*

En conséquence, elle propose, pour l'année 1877, de décerner un prix de *quatre mille francs* à l'auteur du meilleur travail sur l'*étude des petites planètes,* soit par la théorie mathématique de leurs perturbations, soit par la comparaison de cette théorie avec l'observation.

Les Mémoires devront être adressés au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin 1877.

PRIX VALZ.

Mme Veuve Valz, par acte authentique, en date du 17 juin 1874, a fait don à l'Académie d'une somme de *dix mille francs,* destinée à la fondation d'un prix qui sera décerné tous les ans, sous la qualification de *prix Valz,* à des travaux sur l'Astronomie, conformément au prix Lalande.

L'Académie a été autorisée à accepter cette donation par décret en date du 29 janvier 1875. Prenant en considération les études favorites du célèbre directeur de l'Observatoire de Marseille et le service qu'il a rendu à l'Astronomie en organisant en France la recherche des petites planètes, à l'aide de cartes spéciales du ciel, elle a décidé qu'elle décernerait ce prix, dans sa séance publique de

l'année 1877, à l'auteur des meilleures cartes se rapportant à la région du plan invariable de notre système.

Les Mémoires seront reçus au Secrétariat de l'Institut jusqu'au 1er juin 1877.

N° 25. Séance du 28 juin 1875.

Le Verrier (U.-J.). — *Sur les travaux en voie d'exécution à l'Observatoire.*

Faye. — *Sur la trombe de Châlons; examen des faits et conclusion.*

Hirn. — *Note accompagnant la présentation du tome Ier de l'*Exposition analytique et expérimentale de la Théorie mécanique de la chaleur.

Mathieu (É.). — *Mémoire sur le mouvement de rotation de la Terre.*

« L'étude du mouvement de rotation de la Terre peut se partager en deux parties. On peut, en effet, examiner le mouvement absolu de l'axe de rotation de la Terre par rapport à la sphère céleste, et l'on obtient ainsi les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe terrestre. Cette question a été traitée, avec toute l'approximation désirable, par M. Serret (*Annales de l'Observatoire*, t. V, 1859), et je ne m'en occupe pas dans ce travail. En second lieu, on peut rechercher le mouvement de cet axe de rotation, par rapport à la Terre, ou le déplacement des pôles à sa surface, et déterminer la vitesse de rotation autour de cet axe. Cette question m'a semblé susceptible de nouvelles recherches, et c'est à sa solution que se rapporte ce Mémoire.

» Les formules de perturbation du mouvement de rotation d'un corps solide, qui n'est sollicité que par des forces perturbatrices, sont exactement les mêmes que les formules de perturbation du mouvement d'une planète. Dans un Mémoire, dont un extrait a paru dans les *Comptes rendus* (10 mai dernier) et qui paraîtra bientôt dans le *Journal de Mathématiques*, j'ai expliqué d'où provient cette coïncidence et j'y ai donné le théorème général sur lequel elle repose.

» Poisson rappelle cette propriété remarquable, dans la préface de

son *Mémoire sur la rotation de la Terre autour de son centre de gravité* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VII, 1827), et cependant il préfère, pour faire ses calculs, substituer aux formules précédentes un système d'autres formules assez différent. La démonstration que je donne de l'invariabilité du jour sidéral, et qui est fondée sur le théorème général dont j'ai parlé, diffère entièrement de celle de Poisson; mais les deux démonstrations ne se séparent pas seulement par la forme; car Poisson, pour simplifier ses calculs, fait une supposition, qu'il regarde comme suffisamment approchée et qui n'est pas admissible : elle consiste à regarder les orbites du Soleil et de la Lune, qui troublent le mouvement de rotation de la Terre, comme circulaires et situées dans un même plan. Or je montre que cette recherche exige trop de précision pour que l'on puisse négliger dans la fonction perturbatrice les termes qui sont multipliés par les excentricités des deux orbites et par leurs inclinaisons sur une écliptique fixe.

» Mon analyse serait beaucoup simplifiée par chacune des hypothèses suivantes, mais surtout par la première et la troisième :

» 1° Si l'on supposait que la Terre est exactement de révolution;

» 2° Si l'on regardait la différence d'aplatissement de ses deux hémisphères comme tout à fait négligeable;

» 3° Si l'on pouvait considérer les orbites du Soleil et de la Lune comme circulaires et situées dans un même plan fixe.

» La troisième supposition, comme je l'ai dit, ne peut être admise; mais, pour la première et la seconde hypothèse, elles auraient plus de raison d'être faites; car on ne peut douter qu'elles n'approchent beaucoup de la réalité. Il y a cependant un intérêt à ne pas faire non plus *a priori* la première hypothèse, afin de démontrer par la comparaison des résultats de l'analyse avec l'observation que la quantité $\frac{B-A}{B}$, où A et B désignent les deux plus petits moments principaux d'inertie par rapport au centre de gravité, est une très-petite quantité.

» En effet, il semble résulter des observations du pendule en différents points de la Terre que la quantité $\frac{B-A}{B}$ est notablement plus petite que le nombre qui exprime l'aplatissement des pôles. Cepen-

dant, à cause des nombreuses irrégularités de la surface du globe, la démonstration de la petitesse de $\frac{B-A}{B}$ à l'aide du pendule exigerait un très-grand nombre d'observations, faites en plusieurs points de divers méridiens, qu'il faudrait ensuite soumettre au calcul. Mais la véritable méthode pour calculer $\frac{B-A}{B}$ réside dans la théorie actuelle, et je démontre que, si l'on admet que la latitude d'un lieu de la Terre ne peut changer de 2 secondes dans un espace de temps moindre que l'année, il en résulte que le rapport $\frac{B-A}{B}$ est plus petit qu'un millionième. »

André (Ch.). — *Parallaxe solaire déduite de la combinaison de l'observation de Nouméa avec celle de Saint-Paul.*

— Nous devons appeler l'attention de nos lecteurs étrangers sur une modification du Règlement, modification dont ils doivent prendre connaissance s'ils désirent envoyer des Communications. Dorénavant les Mémoires lus ou présentés par des personnes qui ne sont pas Membres ou Correspondants de l'Académie pourront être l'objet d'une analyse ou d'un résumé qui ne dépassera pas trois pages. Par conséquent les Notes destinées à être insérées *in extenso* ou les analyses de Mémoires devront être contenues dans trois pages des *Comptes rendus*. Les Communications des Membres et des Correspondants sont réduites respectivement à six et à quatre pages.

T. LXXXI; 2e semestre 1875.

N° 1. Séance du 5 juillet 1875.

Wolf (C.). — *Description du groupe des Pléiades et mesures micrométriques des positions des principales étoiles qui le composent.*

Stephan (E.). — *Planète (146) Lucine. Éléments de l'orbite.*

N° 2. Séance du 12 juillet 1875.

Carvallo (J.). — *Théorie des nombres parfaits.*

Le nombre parfait est égal à la somme de ses parties aliquotes (*Euclide*, p. 36, Liv. IX). Depuis Euclide, Descartes, Fermat,

Legendre, Euler se sont occupés de ces nombres, mais sans grand succès. L'auteur démontre qu'il ne peut exister de nombre parfait impair, et il ajoute quelques propriétés générales des nombres parfaits.

Gaumet. — *Sur le miroir équerre, instrument destiné à tracer des angles droits sur le terrain et pouvant être utilisé dans la mesure rapide des grandes distances.*

Stephan (E.). — *Éphéméride calculée de la planète* (146) *Lucine.*

Peslin (H.). — *Théorie des tempêtes, conclusion.*

N° 3. Séance du 19 juillet 1875.

Saint-Venant (de). — *De la suite qu'il serait nécessaire de donner aux recherches expérimentales de Plasticodynamique.*

Tresca. — *Observations relatives à la Communication précédente.*

Ledieu (A.). — *Observations relatives à la dernière Communication de M. Hirn. Importance de baser la nouvelle théorie de la chaleur sur l'hypothèse de l'état vibratoire des corps.*

Leveau. — *Sur la comète périodique de d'Arrest.*

Villarceau (Y.). — *Observations relatives à la Communication de M. Leveau.*

Flammarion (C.). — *Observation des satellites de Jupiter pendant les oppositions de 1874 et 1875. Détermination de leurs différences d'aspect et de leurs variations d'éclat.*

N° 4. Séance du 26 juillet 1875.

Villarceau (Y.). — *Recherches sur la théorie de l'aberration, et considérations sur l'influence du mouvement absolu du système solaire dans le phénomène de l'aberration.*

Abbadie (A. d'). — *Sur la latitude d'Abbadia, près de Hendaye (Basses-Pyrénées).*

N° 5. Séance du 2 août 1875.

NICOLAIDÈS (N.). — *Intégration d'une équation aux différences partielles du second ordre.*

Il s'agit de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{2z}{(x+y)^2}$$

dont l'intégrale est

$$z = \frac{X+Y}{x+y} - \frac{1}{2}\left(\frac{X'}{y} + \frac{Y'}{y}\right).$$

FLAMMARION (C.). — *Variations d'éclat du quatrième satellite de Jupiter. Déductions relatives à sa constitution physique et à son mouvement de rotation.*

N° 6. Séance du 9 août 1875.

CHASLES (M.). — *Application de la méthode de correspondance à des questions de grandeur de segments sur les tangentes des courbes.*

« Les questions où entrent des conditions de grandeur de segments rectilignes, traitées jusqu'ici dans la théorie des courbes, sont extrêmement rares, même à l'égard des courbes les plus simples, les sections coniques; c'est que, indépendamment des difficultés de calcul qu'y trouvent les méthodes analytiques, leur solution implique en général la connaissance de l'*ordre* et de la *classe* des courbes, et est donc inaccessible à ces méthodes. Mais le principe de correspondance lève ces difficultés et impossibilités, comme dans beaucoup d'autres questions fort différentes qui ont été le sujet de Communications précédentes.

» Les relations de grandeur de segments rectilignes peuvent être très-variées et donner lieu à une immense quantité de recherches. Il faut donc, pour éviter la confusion, mettre un certain ordre dans le classement des matières. Aussi je ne considérerai ici que des conditions d'égalité de grandeur, et, en outre, les segments seront toujours pris sur les tangentes des courbes. Dans un autre moment, je les prendrai sur les normales, ou bien les uns sur des tangentes et d'autres sur des normales; puis viendront d'autres conditions beaucoup plus variées, et aussi d'autres relations de grandeur.

» I. *Le lieu des points d'où l'on mène à une courbe* U^n *des tangentes de même grandeur est une courbe d'ordre* $2(m+n)$.

$$\left.\begin{matrix} x, & n2 & u \\ u, & 2m & x \end{matrix}\right| 2(m+n).$$

C'est-à-dire : D'un point x d'une droite L on mène n tangentes xa, et des points de contact a on décrit des cercles de rayon donné λ, qui coupent L en $2n$ points u. D'un point u on décrit un cercle de rayon λ, qui coupe U^m en $2m$ points; les tangentes en ces points coupent L en $2m$ points x. Il y a donc $2m+2n$ coïncidences de x et u. Donc la courbe cherchée est d'ordre $(2m+2n)$.

» Ses points à l'infini sont 2 points multiples d'ordre n, situés aux 2 points circulaires, et m points doubles situés aux m points de la courbe U^n.

» II. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe* $U^{n'}$ *une tangente sur laquelle une courbe* U^m *intercepte un segment, terminé au point x, de grandeur constante, est une courbe de l'ordre* $4mn'$.

$$\left.\begin{matrix} x, & n'm2 & u \\ u, & 2mn' & x \end{matrix}\right| 4mn'.$$

C'est-à-dire : D'un point x de L on mène n' tangentes qui coupent U^m en $n'm$ points a, d'où l'on décrit des cercles de rayon donné λ qui coupent L en $2n'm$ points u. D'un point u on décrit un cercle de rayon λ qui coupe U^m en $2m$ points a, d'où l'on mène $2mn'$ tangentes qui coupent L en $2mn'$ points x. Donc $4mn'$ coïncidences de x et u. Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, 2 points multiples d'ordre mn' aux 2 points circulaires, et en chacun des m points de U^m un point de n' inflexions dont les tangentes d'inflexion sont les n' tangentes de $U^{n'}$.

» III. *a. Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe* U^n *une tangente égale à la distance du point x à un point fixe* O *est une courbe de l'ordre* $2m+n$.

$$\left.\begin{matrix} x, & 2m & u \\ u, & n & x \end{matrix}\right| 2m+n.$$

C'est-à-dire : D'un point x de L on décrit un cercle du rayon xO,

qui coupe U^n en $2m$ points θ; les tangentes en ces points coupent L en $2m$ points u. D'un point u on mène n tangentes de U^n; pour chacune d'elles, il y a sur L un point x à égale distance du point de contact et du point O; donc n points x. Ainsi $2m+n$ coïncidences de x et u. Donc, etc.

» Les $2m+n$ points de la courbe situés à l'infini sont les $m+n$ points des tangentes de U^n aux pieds des normales abaissées du point O, et les m points de la courbe U^n.

» III. *b. Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes U^n, $U^{n'}$ deux tangentes de même longueur est une courbe de l'ordre $2mn'+2m'n+nn'$.*

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n\,2m' & u \\ u, & n'(2m+n) & x \end{array}\right| \, 2mn'+2m'n+nn'.$$

C'est-à-dire : D'un point x de L on mène n tangentes $x\theta$ de U^n, et l'on décrit des cercles de rayons $x\theta$ qui coupent $U^{n'}$ en $n\,2m'$ points θ dont les tangentes coupent L en $2nm'$ points u. D'un point u on mène n' tangentes $u\theta'$; il existe sur L, d'après (III. a), $2m+n$ points x, d'où l'on mène à U^n une tangente égale à la distance du point x à un point θ' de $U^{n'}$; donc $n'(2m+n)$ points x pour les n' tangentes $u\theta'$. Il y a ainsi $2mn'+2m'n+nn'$ coïncidences de x et u. Donc, etc.

» Les points de la courbe situés à l'infini sont m points multiples d'ordre $2n'$ situés aux m points de U^n, m' points multiples d'ordre $2n$ situés aux m' points de $U^{n'}$, et nn' points simples appartenant à des perpendiculaires aux nn' tangentes communes aux deux courbes U^n, $U^{n'}$.

» IV. *a. Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe U^n une tangente égale à la distance du point de contact à un point O est une courbe d'ordre $m+2n$.*

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n\,2 & u \\ u, & m & x \end{array}\right| \, m+2n.$$

C'est-à-dire : D'un point x on mène n tangentes $u\theta$ à U^n, et de leurs points de contact on décrit des cercles de rayons θO qui coupent L en $2n$ points u. Un point u donne lieu à m points θ de U^n, à égale distance de O et de u, dont les tangentes coupent L en m points x. Il y a donc $m+2n$ coïncidences de x et u. Donc, etc.

» Les points de la courbe à l'infini sont 2 points multiples d'ordre n situés aux 2 points circulaires, et les m points de U^n.

» IV. *b. Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe U^n une tangente $x\theta$ égale à une tangente $\theta\theta'$ menée du point de contact θ à une autre courbe $U^{n'}$ est une courbe de l'ordre $2mm' + 2mn' + mn'$.*

$$\begin{array}{lll|l} x, & nn'2 & u & \\ u & (2m'+n')m & x & \end{array} (2m'+n')m + 2nn'.$$

C'est-à-dire : D'un point x de L on mène n tangentes $x\theta$, puis, des points de contact θ, nn' tangentes $\theta\theta'$ de $U^{n'}$, et l'on prend sur L les $2nn'$ points x à distance $\theta u = \theta\theta'$. Un point u donne lieu, en vertu du théorème III. a, à $(2m'+n')m$ points θ pour lesquels on a $\theta u = \theta\theta'$; les tangentes en ces points coupent L en $(2m'+n')m$ points x. Il y a $(2m'+n')m + 2nn'$ coïncidences de x et u. Donc, etc.

» Les points de la courbe situés à l'infini sont 2 points multiples d'ordre nn' aux 2 points circulaires, m points multiples d'ordre n' aux m points de U^n, et mm' points doubles aux m' points de $U_{m'}$.

» V. *Le lieu d'un point d'où l'on mène à une courbe $U^{n'}$ une tangente égale à un segment compris sur cette droite entre son point de contact et une courbe U_m est une courbe d'ordre $m(m'+2n')$.*

$$\begin{array}{lll|l} x, & n'm2 & u & \\ u, & (m'+2n')m & x & \end{array} m(m'+4n') \quad (\text{IV}. a).$$

» Il y a $2mn'$ solutions étrangères dues aux points x de L qui se trouvent sur les tangentes de $U^{n'}$ issues des 2 points circulaires de l'infini. Il reste $m(m'+2n')$ coïncidences de x et u. Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, m points multiples d'ordre $2n'$ aux m points de U_m, et m' points multiples d'ordre m situés aux m' points de $U^{n'}$.

» VI. *a. Le lieu d'un point x pris sur chaque tangente d'une courbe U^n à une distance d'un point O égale à la distance de ce point O au point de contact θ de la tangente est une courbe de l'ordre $2(m+n)$.*

$$\begin{array}{lll|l} x, & n2 & u & \\ u, & 2m & x & \end{array} 2m + 2n.$$

» Donc, etc.

» La courbe a deux points multiples d'ordre n aux deux points circulaires de l'infini, et m points doubles aux m points de U^n.

» VI. *b. Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe* U^n *une tangente $x\theta$, satisfaisant à la condition qu'une tangente $\theta\theta'$ menée du point de contact θ à une courbe* $U^{n'}$ *soit égale à la distance de son point de contact θ' au point x, est une courbe de l'ordre* $2(m+n)n' + mm'$.

$$\begin{array}{lll|l} x, & nn'2 & u & \\ u, & (m'+2n')m & x & 2nn'+(m'+2n')m. \end{array}$$

C'est-à-dire : D'un point x on mène, à U^n, n tangentes $x\theta$, et de leurs points de contact on mène $n'n''$ tangentes $\theta\theta'$ à la courbe $U^{n''}$; les cercles décrits des points de contact θ' avec les rayons $\theta'\theta$ coupent L en $2nn'$ points u. Un point u étant pris sur L, il existe, sur $U^{n'}$, $(m'+2n')m$ points θ tels, que $\theta\theta' = \theta' u$ (d'après le théorème IV. a); les tangentes aux point θ coupent L en $(m'+2m')m$ points x. Il y a donc $(m'+2n')m + 2nn'$ coïncidences de x et u. Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, deux points multiples d'ordre nn', m points multiples d'ordre $2n'$ aux m points de U_m, et mm' points simples sur les tangentes de U^n aux $m'm$ points de cette courbe situés sur les tangentes des m' points de $U^{n'}$ à l'infini.

» VII. *La tangente en chaque point θ d'une courbe* $U^{n'}$ *rencontre une courbe* U^m *en m points a : les milieux des m segments θa sont sur une courbe d'ordre* $m(m'+n')$.

$$\begin{array}{lll|l} x, & n'm & u & \\ u, & (m'+2n')m & x & m(m'+3n'). \end{array}$$

C'est-à-dire : D'un point x de L on mène n' tangentes $x\theta$ de U^n, dont chacune coupe U^n en m points a; des perpendiculaires élevées sur le milieu de chaque segment θa coupent L en m points u, ce qui fait $n'm$ points u pour les n' tangentes $x\theta$. Un point u donne lieu à $(m'+2n')m$ tangentes θa, pour lesquelles $u\theta = ua$ (théorème IV. a); ces tangentes coupent L en $(m'+2n')m$ points x. Donc $m(m'+3n')$ coïncidences de x et u.

» Il y a $2mn'$ solutions étrangères dues aux points x de L situés sur les tangentes de $U^{n'}$ passant par les 2 points circulaires de l'infini. Il reste $m(m'+n')$. Donc, etc.

» Les points de la courbe à l'infini sont m points multiples d'ordre n situés aux m' de $U^{n'}$, et mn' points simples situés sur les tangentes de $U^{n'}$ aux mm' points d'intersection des 2 courbes.

» VIII. *Le lieu d'un point x d'où l'on peut mener à une courbe $U^{n'}$ une tangente $x\theta$ qui soit divisée en son milieu par une courbe U_m est une courbe de l'ordre $m(m'+n')$.*

$$\left.\begin{matrix} x, & n'm & u \\ u, & mm' & x \end{matrix}\right| m(m'+n').$$

C'est-à-dire : D'un point x on mène n' tangentes $x\theta$ de $U^{n'}$; les perpendiculaires élevées sur le milieu de chaque tangente coupent U^m en m points, et les droites menées de ces points au point de contact de la tangente coupent L en m points u, ce qui fait $n'm$ points u. Les droites menées d'un point u de L à des points θ de $U^{n'}$ ont leurs milieux sur une courbe d'ordre m' (VI); conséquemment $m'm$ droites $u\theta$ ont leurs milieux sur U^m; les tangentes en x points θ coupent L en mm' points x. Il y a $m(m'+n')$ coïncidences de x et u. Donc, etc.

» Les points de la courbe à l'infini sont m points multiples d'ordre n situés aux m points de U^m, et m' points multiples d'ordre m situés aux m' points de $U^{n'}$.

» IX. *a. Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe U^n une tangente dont le point de contact soit à la même distance d'un point O que le point x, est une courbe de l'ordre $2(m+n)$.*

$$\left.\begin{matrix} x, & n2 & u \\ u, & 2m & x \end{matrix}\right| 2(m+n).$$

» Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, 2 points multiples d'ordre n aux 2 points circulaires, et m points doubles aux m points de U^n.

» IX. *b. Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe U^n une tangente $x\theta$ telle, que la tangente $\theta\theta'$ menée de son point de contact θ à une courbe $U^{n'}$ soit égale à la distance de son point de contact θ' au point x, est une courbe de l'ordre $mm'+2mn'+2nn'$.*

$$\left.\begin{matrix} x, & nn'2 & u \\ u, & (m'+2n')m & x \end{matrix}\right| mm'+2mn'+2nn'.$$

C'est-à-dire : D'un point x de L on mène n tangentes $x\theta$, et des

points de contact θ on mène nn' tangentes $\theta\theta'$, puis des points de contact θ' on décrit des cercles qui coupent L en $2nn'$ points u. Un point u étant pris sur L, il existe (en vertu du théorème IV. a) $(m'+2n')m$ points θ de U^n, tels que $\theta\theta'=\theta' u$; les tangentes en ces points θ coupent L en $(m'+2n')m$ points u. Donc $mm'+2mn'+2nn$ coïncidences de x et u. Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, deux points multiples d'ordre nn' aux deux points circulaires, m points multiples d'ordre $2n'$ aux m points de U^m, et mm' points simples appartenant aux tangentes de U^n, dont les points de contact θ sont les points d'intersection de U^n par les m' asymptotes de $U^{n'}$.

» Observation. — 1. Dans tous les théorèmes qui précèdent, j'ai indiqué, après chaque démonstration, la nature et la position des points multiples ou simples de chaque lieu géométrique qui se trouvent sur la droite de l'infini; points déterminés directement, d'après les conditions de la question, sans intervention du principe de correspondance, et qui par conséquent offrent une vérification du résultat de la démonstration générale, vérification bien propre à inspirer confiance dans la méthode purement géométrique dont il s'agit.

» 2. Je me suis borné à des questions impliquant la considération d'une ou de deux courbes seulement; mais dans une prochaine Communication j'étendrai le procédé de démonstration à des questions relatives à trois et quatre courbes. »

Bonnet (O.). — *Remarque sur la Note de M. Nicolaïdès, insérée dans le précédent « Compte rendu ».*

« L'équation aux différentielles partielles du second ordre dont M. Nicolaïdès a donné l'intégrale dans le *Compte rendu* de lundi dernier ne présente aucune difficulté; elle rentre, en effet, dans un type auquel s'applique immédiatement la méthode par cascade de Laplace.

» Observons d'abord que, en prenant pour variables indépendantes les fonctions f et f_1, que nous appellerons x et y, l'équation dont il s'agit prend la forme simple

$$(x+y)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2z. \tag{1}$$

Cette équation ne s'intégrant pas immédiatement, je pose

$$(x+y)^2 \frac{\partial z}{\partial x} = z_1,$$

d'où

$$(x+y)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_1}{\partial y},$$

d'où

$$(x+y)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{2z_1}{x+y},$$

ce qui permet de remplacer l'équation (1) par

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{2z_1}{x+y} = 2z; \tag{2}$$

différentiant par rapport à x, afin de chasser z, il vient

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} - 2\frac{\frac{\partial z_1}{\partial x}}{x+y} = 0,$$

équation qui s'intègre immédiatement et donne

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = X(x+y)^2,$$

X étant une fonction quelconque de x, d'où

$$z_1 = Y + \int X(x+y)^2 dx,$$

Y étant une fonction de y ; ou bien, en remplaçant X par une dérivée troisième X''', de façon à chasser le signe d'intégration,

$$z_1 = Y + X''(x+y)^2 - 2X'(x+y) + 2X.$$

Reste à trouver z. Or

$$(x+y)^2 \frac{\partial z}{\partial x} = z_1;$$

donc

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{Y}{(x+y)^2} + X'' - \frac{2X'}{x+y} + \frac{2X}{(x+y)^2},$$

d'où

$$z = Y_1 - \frac{Y}{x+y} + X' - \frac{2X}{x+y}.$$

» Cette valeur est trop générale; mais, si nous exigeons que l'équation (2) soit satisfaite, on trouve $2Y_1 = Y'$; donc, en changeant Y en $2Y$, on a

$$z = X' + Y' - 2\frac{X+Y}{x+y}.$$

C'est le résultat de M. Nicolaïdès.

» Si du cas de deux variables indépendantes x, y on veut s'élever au cas de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on cherchera, en se laissant guider par l'analogie, ce que doit être la constante A pour que l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^n z}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \frac{Az}{(x_1 + x_2 + \ldots + x^n)_n}$$

admette une intégrale de la forme

$$z_1 X_1 + X'_1$$

(X_1 étant une fonction arbitraire de x_1, et X'_1 la dérivée de X_1 par rapport à x_1), par conséquent $n-1$ autres intégrales de la forme

$$z_2 X_2 + X'_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$z_n X_n + X'_n,$$

et enfin une intégrale générale de la forme

$$z_1 X_1 + z_2 X_2 + \ldots + z_n X_n + X'_1 + X'_2 + \ldots + X'_n.$$

Or, en substituant $z_1 X_1 + X'_1$ à z dans (1), on trouve

$$X_1 \frac{\partial^n z_1}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} + X'_1 \frac{\partial^{n-1} z_1}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$
$$= X_1 \frac{A z_1}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n} + X'_1 \frac{A}{(x_1 + \ldots + x_n)^n},$$

d'où

$$\frac{\partial^n z_1}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \frac{A z_1}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n}, \quad \frac{\partial^{n-1} z_1}{\partial x_2 \partial x_3 \ldots \partial x_n} = \frac{A}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n}.$$

Différentiant la deuxième équation par rapport à x_1 et retranchant de la première, il vient

$$z_1 = \frac{-n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n},$$

d'où, en portant dans la deuxième équation,

$$A = (-1)^n . 1 . 2 . 3 \ldots n.$$

Ainsi l'équation (1) doit être de la forme

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \frac{(-1)^n . 2 . 3 \ldots n}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n} z,$$

et sa première intégrale est

$$\frac{-n X_1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + X'_1;$$

par suite les $(n-1)$ autres intégrales sont

$$\frac{-n X_2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + X'_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{-n X_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + X'_n,$$

et enfin l'intégrale générale a pour valeur

$$\frac{-n(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + X'_1 + X'_2 + \ldots + X'_n. \text{ »}$$

N° 7. Séance du 16 août 1875.

Le Verrier (U.-J.). — *Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal M. G.-B. Airy) et à l'Observatoire de Paris pendant le deuxième trimestre de l'année* 1875.

Tisserand (F.). — *Observation des étoiles filantes des* 9, 10 *et* 11 *août.*

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et Ch. BRISSE.

T. XIV (2e série), janvier-juillet 1875 [1].

WAILLE (I.). — *Génération des lignes et des surfaces du second degré d'après Jacobi.* (16 p.)

Il s'agit dans cet article des propriétés métriques focales des surfaces et des courbes du second degré. On sait que Jacobi a trouvé dans les beaux théorèmes d'Ivory, relatifs aux points correspondants, le moyen d'étendre aux surfaces du second ordre les propriétés métriques focales des sections coniques [2]. Le travail de Jacobi a paru dans le deuxième Cahier du tome LXXIII du *Journal de Borchardt.* Dans le troisième Cahier du même tome a paru un travail de M. Hermes sur le même sujet. Enfin, nous citerons un Mémoire de M. Darboux où le même mode de génération est étudié et étendu aux cyclides.

CAHEN (Ch.-Ph.). — *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (10 p.)

Cette courbe remarquable est engendrée par un point de la circonférence d'un cercle qui roule intérieurement sans glisser sur la circonférence d'un cercle de rayon triple.

Steiner a énoncé sans démonstration un grand nombre de ses propriétés; M. Cremona les a démontrées, et a donné des propriétés nouvelles dans le *Journal de Borchardt* (année 1865, p. 101). Son Mémoire est suivi d'une courte Note dans laquelle Clebsch rattache la théorie de cette courbe à celle des lignes unicursales. Citons encore un travail de M. Painvin inséré dans les *Nouvelles Annales.* M. Cahen établit, d'une manière très-simple et très-élémentaire, les propriétés principales de la courbe.

PICART (A.). — *Discussion algébrique de l'équation en* λ. (6 p.)

Il est question de l'équation qui détermine les couples de sécantes, passant par l'intersection de deux coniques. L'auteur établit, par une voie purement analytique, les propriétés remarquables

---

[1] Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 25.

[2] Voir *Bulletin*, t. IV, p. 64, et t. V, p. 64.

de cette équation dans le cas où il y a un ou trois couples de sécantes réelles.

Laurent (H.). — *Sur la séparation des racines des équations.*

L'auteur fait connaître une proposition analogue à celle que M. Hermite a donnée en premier lieu, pour remplacer le théorème de Sturm, mais qui est comprise comme cas particulier dans les théorèmes plus généraux donnés depuis par M. Hermite.

Posse (C.). — *Sur les quadratures.* (14 p.)

Cet article traite de questions semblables à celles qui ont fait, à diverses reprises, l'objet des études de MM. Tchebychef et Hermite. Il se propose de résoudre la question suivante :

« Trouver la forme de la fonction $f(x)$ qui, restant positive entre les limites -1 et $+1$ de la variable, donne

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\varphi(x)\,dx = \mathrm{K}[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)] + a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\varepsilon' + \ldots,$$

K étant indépendant de la forme de $\varphi(x)$ et

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1} + \ldots \text{ »}$$

Le travail contient plusieurs formules élégantes; mais l'exposition nous a paru trop condensée, eu égard à la nature du Recueil.

Maleyx (L.). — *Détermination des diviseurs à coefficients commensurables, d'un degré donné, d'un polynôme entier en x à coefficients commensurables.* (23 p.)

Généralisation de la théorie des racines commensurables, et extension des principaux résultats de cette théorie. L'auteur applique sa méthode générale aux diviseurs du premier, du second et du troisième degré.

Floquet. — *Intégration de l'équation d'Euler par les lignes de courbure de l'hyperboloïde réglé.* (8 p.)

L'auteur, en prenant pour déterminer un point les paramètres des deux génératrices rectilignes passant en ce point, montre que l'équation différentielle des lignes de courbure devient, avec ce choix de variables, la célèbre équation d'Euler, d'où résulte un procédé nouveau d'intégration de cette équation.

MOUTIER (J.). — *Sur la diacaustique d'une surface plane.*

Indication d'une méthode élémentaire pour la détermination de cette diacaustique.

SANCERY (L.). — *Propriétés des quadrilatères complets qui ressortent de la considération de leurs bissectrices.*

M. Mansion a démontré, dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. I, p. 16 et 65), une belle proposition de Steiner relative à un quadrilatère complet et à ceux qu'on en dérive à l'aide des douze bissectrices de ses angles. L'auteur indique plusieurs autres propriétés intéressantes des mêmes quadrilatères.

LEMONNIER (H.). — *Expression de s comme quotient de deux déterminants.*

LEMONNIER (H.). — *Détermination du paramètre d'une section parabolique dans un hyperboloïde à une nappe.*

JOFFROY (J.). — *Démonstration géométrique de l'inégalité*

$$a - \sin a < \frac{a^3}{4}.$$

LEMONNIER (H.). — *Foyers et directrices des surfaces du second ordre.*

MALEYX (L.). — *Propriétés de la strophoïde. Démonstration d'un théorème de Poncelet. Propriétés des surfaces anallagmatiques.* (2 art.; 23-18 p.)

PELLET. — *Expression de la somme des puissances semblables des racines d'une équation en fonction des coefficients.* (6 p.)

Simplification de la démonstration donnée dans l'Algèbre supérieure de la formule bien connue que Waring a établie dans ses *Meditationes algebraicæ.*

LUCAS (Éd.). — *Sur la théorie des sections coniques.* (4 p.)

Démonstrations simples de plusieurs théorèmes importants, relatifs aux triangles conjugués, inscrits, circonscrits.

NIEWENGLOWSKI. — *Trouver la plus petite corde d'une ellipse qui soit normale à l'une de ses extrémités.*

SALTEL. — *Sur la détermination analytique du centre d'une section plane faite dans une surface du second ordre.*

Realis (S.). — *Simples remarques sur les racines entières des équations cubiques.* (10 p.)

Vachette. — *Permutations rectilignes de $2q$ lettres égales deux à deux où trois lettres consécutives sont toujours distinctes.* (9 p.)

Jullien (A.). — *Ellipse considérée comme projection oblique d'un cercle. Construction simplifiée des axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués.*

JOURNAL für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C.-W. Borchardt.

T. LXXIX; 1875.

Heine (E.). — *Sur les courants électriques constants dans des plaques planes.* (16 p.)

Lorsqu'il y a un nombre fini de points $A_1, A_2, \ldots$, par lesquels un courant entre dans une plaque ou bien en sort, et que le courant est devenu stationnaire, M. Kirchhoff a montré que, pour trouver l'intensité du courant en un point quelconque de la plaque, il faut calculer le potentiel V de l'électricité libre en ce point, et qu'on peut dès lors remplacer le problème par cet autre : « Trouver une fonction V des coordonnées rectangulaires, qui satisfasse en chaque point P de la plaque plane à l'équation différentielle $\Delta V = 0$ du potentiel logarithmique, qui devienne infinie comme

$$E_1 \log PA_1 + E_2 \log PA_2 + \ldots,$$

quand le point P s'approche d'un des points $A_1, A_2, \ldots$, la somme des constantes E étant égale à zéro; qui satisfasse en tous les autres points aux conditions connues de continuité pour des potentiels, et enfin qui s'évanouisse quand on la différentie suivant la normale du bord. M. Kirchhoff a encore réussi à déterminer complétement la fonction V pour des plaques circulaires ou infinies, et son analyse s'est trouvée d'accord avec l'expérience [1].

---

[1] *Poggendorff's Annalen*, t. LXIV, LXVII, XCVII.

En se reportant à ces recherches, M. Heine développe le potentiel électrique, d'abord pour des plaques homogènes dont on connaît la représentation conforme sur l'intérieur d'un cercle, savoir pour des plaques rectangulaires et elliptiques. Ces résultats sont susceptibles d'être appliqués à des plaques qu'on peut engendrer par une représentation conforme d'un rectangle, pourvu que l'on connaisse les systèmes de lignes orthogonales qui correspondent aux droites parallèles aux côtés du rectangle. La seconde Partie du Mémoire s'occupe de la résolution des mêmes problèmes par une méthode analytique, indépendante des formules connues de la représentation, la difficulté étant surtout de développer le logarithme d'une distance. A cette occasion, M. Heine revient à sa définition d'une fonction *continue* de plusieurs variables. Si la fonction $f(x, y)$ est continue séparément pour chacune des deux variables x, y, il l'appelle continue en chaque point suivant les directions de ces variables; au contraire, il appelle la continuité *indifférente* (*gleichmässig*) lorsqu'elle a lieu indifféremment pour tous les points et en tous sens.

HERMITE (Ch.). — *Extrait d'une Lettre à M. Borchardt sur la réduction des formes quadratiques ternaires.* (4 p.; fr.)

La Lettre se rapporte à la limitation du produit des coefficients des carrés des variables dans les formes quadratiques ternaires réduites.

DU BOIS-REYMOND (P.). — *Essai d'une classification des fonctions arbitraires d'arguments réels d'après leurs variations dans les intervalles très-petits.* (17 p.)

Voici la classification des fonctions discutée par l'auteur dans les différentes parties de son Mémoire : I. La fonction sans aucune restriction. — II. La fonction intégrable. — III. La fonction continue. Cette partie du Mémoire est enrichie d'une Communication de M. Weierstrass concernant la fonction

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} n \left[b^n \cos(a^n x) \pi \right],$$

où a est un nombre entier impair, b une constante positive, et $f(x)$ une fonction continue de x qui ne possède nulle part un coefficient

différentiel, tant que la valeur du produit *ab* surpasse une certaine limite. — IV. La fonction différentiable et la fonction ordinaire. — V. La fonction soumise aux conditions de Dirichlet. Les autres parties du Mémoire contiennent encore : VI. Des remarques sur la classification proposée. — VII. La manière dont la fonction s'approche de ses valeurs séparées. — VIII. Les singularités de la fonction. — IX. Distribution des singularités, telles que les racines de

$$0 = \sin \cfrac{1}{\sin \cfrac{1}{\sin \cdot \, \cdot \, \cdot \cfrac{1}{\sin \frac{1}{x}}}}.$$

Du Bois-Reymond (P.). — *Théorèmes généraux sur la portée des formules intégrales qui servent à la représentation des fonctions arbitraires.* (29 p.)

La formule de Fourier $\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^{\infty} d\beta f(\beta) \cos \alpha(\beta - x) = \pi f(x)$ a été l'objet de deux autres Mémoires du même auteur : 1° *Sur les propriétés générales de la classe d'intégrales doubles* où est comprise l'intégrale de Fourier [1] ; 2° *La théorie des intégrales et des formules de Fourier* [2]. L'auteur s'y était proposé d'éclaircir deux questions : Quel est le rôle joué par les cosinus, et par quelle fonction peut-on le remplacer? A quelle condition la formule représente-t-elle aussi des fonctions de plusieurs variables, si l'on remplace l'intégrale double par des intégrales multiples? Le but principal du nouveau Mémoire est de soumettre à un examen détaillé la nature de la fonction $f(x)$; une telle recherche fait voir pour quelles fonctions mathématiques imaginables la fonction de Fourier ou bien celles qu'on a modelées sur elle peuvent encore être valables. M. du Bois-Reymond, tout en partant de deux formules générales qui servent de fondement à ses recherches antérieures, a découvert certaines restrictions que la fonction $f(x)$ doit subir pour que la formule puisse s'appliquer, et il les a énoncées dans neuf

---

[1] *Journal de Borchardt*, t. LXIX, p. 65.

[2] *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 362.

théorèmes généraux, qui contiennent les critères essentiels et suffisants pour les cas ordinaires. La généralité du problème est tellement exceptionnelle qu'on ne peut pas s'étonner de ne pas trouver de critères qui épuisent à fond le sujet. De même, on ne sait pas établir des critères complets pour la convergence de toutes les séries possibles, et la considération des intégrales de Fourier paraît présenter des difficultés d'un ordre supérieur.

Stern (M.). — *Sur la théorie des nombres eulériens.* (32 p.)

En développant $\frac{1}{\cos hx}$ ou bien $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$ suivant des puissances croissantes de x, on obtient une série qu'on peut écrire ainsi :

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = F(x) = 1 - \frac{E_1 x^2}{1.2} + \frac{E_2 x^4}{1.2.3.4} - \frac{E_3 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Raabe et après lui d'autres géomètres, qui ont étudié les propriétés des coefficients $E_1, E_2, \ldots$, leur ont donné le nom de *nombres eulériens,* et l'on avait déjà reconnu qu'ils possédaient quelques caractères distinctifs, par exemple que E_{2k} se termine par le chiffre 5, E_{2k+1} par 1, etc.

M. Stern se procure, par un procédé qui se distingue un peu de celui que nous venons de signaler, une série de nombres analogues, mais plus généraux. Si l'on différentie $F(x)$ plusieurs fois, on verra que, en posant $z = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2$, on aura

$$F^{(2n)}(x) = (-1)^n \frac{2}{e^x + e^{-x}} \left[a^{(2n)} - a_1^{(2n)} z + a_2^{(2n)} z^2 - \ldots \pm a_n^{(2n)} z^n\right],$$

$$F^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2z}{e^x - e^{-x}} \left[a^{(2n+1)} - a_1^{(2n+1)} z + a_2^{(2n+1)} z^2 - \ldots \pm a_n^{(2n+1)} z^n\right],$$

où $(2n)$ et $(2n+1)$ désignent des indices, et tous les coefficients a ne contiennent plus x. Comme l'on a $F^{(2n)}(0) = (-1)^n a^{2n}$ et aussi $(-1)^n F^{(2n)}(0) = E_n$, il s'ensuit que $E_n = a^{(2n)} = a^{(n-1)}$. La série $a^{(\alpha)}$ comprend donc chaque nombre eulérien deux fois; les autres séries $a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}, \ldots$ pourront se nommer *nombres eulériens d'ordre supérieur.*

Il n'est pas possible d'énumérer ici tous les résultats auxquels M. Stern parvient dans son Mémoire, résultats qu'avaient trouvés

en partie avant lui MM. Scherk, Sylvester, etc. Cependant il est intéressant de rencontrer à la fin un caractère général de ces nombres. Les nombres eulériens de tous les ordres appartiennent à une espèce particulière de séries qu'on n'a pas encore considérée jusqu'à présent; elles tiennent une position intermédiaire entre les séries en général et les séries à différences constantes; car ici les différences ne sont pas absolument constantes, mais relativement; c'est-à-dire que, à partir d'un terme déterminé, la $(n-1)^{\text{ième}}$ série au moins des différences est constante pour les n derniers chiffres de ces nombres.

STURM (R.). — *Produits, systèmes élémentaires et caractéristiques des courbes gauches cubiques.* (41 p.)

La théorie des caractéristiques des courbes gauches doit commencer par les cubiques qui ressemblent en quelque sorte aux coniques planes. On en trouve quelques cas dans les travaux de plusieurs auteurs. M. Sturm donne maintenant le commencement des résultats qu'il a obtenus en étudiant à part ce sujet. Un résumé des résultats obtenus se trouve à la fin du Mémoire; un second Mémoire du tome LXXX nous y ramènera.

MILINOWSKI. — *Sur une correspondance réciproque du second degré.* (19 p.)

Imaginons dans un plan trois systèmes homographiques $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$; supposons de plus qu'au point de concours $X_{0,1}$ de deux droites x_0 et x_1, homologiques de Σ_0 et Σ_1, corresponde la droite x_2 homologue de Σ_2, de même qu'à la droite $x_{0,1}$, qui joint deux points homologues X_0 et X_1 de Σ_0 et Σ_1 correspond, le point homologue X_2 de Σ_2. Toutes les droites $x_{0,1}$ et tous les points $X_{0,1}$ forment un nouveau système $\Sigma_{0,1}$, réciproque de Σ_2.

Il s'agit de résoudre le problème de la correspondance de ces deux systèmes; par exemple : « Qu'un point ou une droite d'un des systèmes réciproques se meuve d'après une loi fixée, d'après quelle loi se meut la droite correspondante ou le point correspondant? »

REYE (Th.). — *Sur des surfaces algébriques qui sont apolaires l'une à l'autre.* (17 p.)

Nous avons déjà donné (*Bulletin*, t. VII, p. 252) un résumé succinct de plusieurs Mémoires de M. Reye où il a exposé les idées fondamentales de ses nouvelles recherches géométriques. Alors il

avait montré que toute surface Φ^n de la $n^{\text{ième}}$ classe possède des surfaces polaires par rapport à des plans simples, à des groupes de plans et aussi à des surfaces F^k d'ordre k, si $k < n$. Cependant il y a des surfaces F^k apolaires à Φ^n, auxquelles chaque surface de la $(n-k)^{\text{ième}}$ classe peut être rapportée comme polaire.

Le nouveau travail étend la définition des surfaces d'ordre k apolaires à Φ^n, de manière qu'on peut l'appliquer au cas $k > n$. Cette extension dérive surtout d'une considération qui fait voir que les relations mutuelles de deux surfaces apolaires l'une à l'autre, Φ^n et F^k, sont tout à fait réciproques, qu'on peut donc échanger F^k et Φ^n, et dire que, si F^k est apolaire à Φ^n, Φ^n est apolaire à F^k. Ces relations réciproques des deux surfaces ne se détruisent pas par des transformations collinéaires et réciproques; elles constituent, en effet, des propriétés d'invariants entre les deux surfaces. Par conséquent, la théorie des surfaces apolaires mène rapidement à de remarquables covariants et invariants de surfaces et de courbes algébriques. Enfin on peut la généraliser sans difficulté et l'appliquer à la théorie des formes algébriques à plus de quatre variables.

Malet (J.-C.). — *Nouvelle démonstration de la réduction des intégrales hyperelliptiques à la forme normale.* (6 p.; angl.)

Soit $R(x)$ une fonction algébrique rationnelle quelconque de x, et soit

$$X = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{2m}),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ dénotent des quantités réelles positives ou négatives; l'intégrale $\int \frac{R(x)\,dx}{\sqrt{X}}$, prise entre des limites arbitraires, pourra toujours se réduire, par des substitutions réelles, à des formes telles que $\int_0^\theta \frac{R(\sin^2\theta)\,d\theta}{\Delta_{2m-3}(k,\theta)}$, où

$$\Delta_{2m-3}(k,\theta) = \sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)(1-k_1^2\sin^2\theta)\ldots(1-k_{2m-4}^2\sin^2\theta)},$$

θ étant un angle réel, et $k^2, k_1^2, \ldots, k_{2m-4}^2$ des quantités réelles et positives, chacune inférieure à l'unité.

Mertens (F.). — *Sur la règle de la multiplication pour deux séries infinies.* (3 p.)

D'après Cauchy et Abel on a

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots)(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots) = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots,$$

où

$$w_0 = u_0 v_0, \quad w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0, \ldots, \quad w_k = u_0 v_k + u_1 v_{k-1} + \ldots + u_k v_0,$$

si les séries mod. u_0 + mod. $u_1 + \ldots$ et mod. v_0 + mod. $v_1 + \ldots$ sont convergentes. Ce théorème subsiste si ce sont seulement les modules des membres de l'une des deux séries données qui forment une série convergente.

Frobenius (G.). — *Applications de la théorie des déterminants à la Géométrie métrique.* (63 p.)

La première partie du Mémoire traite des relations entre les systèmes de cercles, de points et de cercles principaux sur la sphère; la seconde, des relations entre les systèmes de sphères, de points et de plans. On connaît le travail de M. Darboux sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace ([1]). On y trouve une grande partie des relations métriques et des constructions que M. Frobenius discute dans ce nouveau Mémoire de 1874, qui a un but un peu différent de celui des recherches de M. Darboux. Il s'est surtout proposé de montrer qu'il est très-facile et très-naturel de déduire d'un petit nombre de relations métriques les solutions de quelques problèmes compliqués de Géométrie. Ce nouveau point de vue et la difficulté de représenter séparément les résultats qu'on ne trouve pas chez M. Darboux ont décidé l'auteur à publier un abrégé de ses recherches, qu'il dit avoir commencées dès 1868, où un concours fut ouvert sur une question de cette nature à l'Université de Berlin. La foule des développements ne se prête pas bien à une analyse détaillée du contenu.

Jordan (C.). — *Sur la limite du degré des groupes primitifs qui contiennent une substitution donnée.* (11 p.; fr.)

Si un groupe primitif G (ne contenant pas le groupe alterné) contient une substitution A qui ne déplace que m lettres, le degré de G ne pourra dépasser une certaine limite (théorème de M. Jordan,

---

([1]) *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. I, 1872. — *Bulletin*, t. VII, p. 199.

publié en 1871). Si p (nombre premier, ordre de A) est supérieur à $\frac{2}{\log 2} g \log g + g + 1 = f(g)$ (g étant le nombre des cycles de A), le degré de G ne pourra dépasser $pg + \frac{2}{\log 2} g \log g + 2g$. Actuellement cette limite se trouve fixée à

$$n \overline{\gtrless} g(p+g)\left[\log \frac{g(p+g)}{p+eg} - \log \frac{e-1}{\log e} + 1 - \frac{1}{\log e}\right] + \frac{p+g}{e-1} + 2g + \frac{pg-3}{2},$$

où e est égal à 2 si $p = 2$, et à $\frac{2p}{p-1}$ si p est impair.

Pour $g > 1$, on a moins précisément $n < (p+g)(p+g \log g)$. Si la substitution A, au lieu d'être d'ordre premier, est quelconque, il s'ensuit que $n < \frac{(4+m)(4+m \log \frac{1}{2} m)}{4}$.

Du Bois-Reymond (P.). — *Sur une forme changée d'intégrabilité des fonctions.* (4 p.)

Addition au premier Mémoire de l'auteur (même tome).

Stern (M.). — *Sur la valeur de quelques intégrales.* (2 p.)

Extension d'une Note, t. LXXVIII, p. 340 (*Bulletin*, t. VII, p. 260).

Stahl (W.). — *Sur la théorie des surfaces potentielles, en particulier de celles qui appartiennent à des corps limités par des surfaces du second ordre.* (39 p.)

En général, il faut considérer les potentiels extérieur et intérieur d'une masse comme deux fonctions distinctes. Or il est possible d'établir les valeurs analytiques du potentiel extérieur pour des points intérieurs. Alors cette fonction, définie comme monodrome en dehors de la masse, devient polydrome en dedans; donc, pour caractériser la fonction potentielle extérieure dans tous les points de l'espace, il faut en rechercher les discontinuités pour les points intérieurs, en particulier les points, les lignes, les surfaces limites où elle devient infinie, et ces lieux de discontinuité serviront mieux à préciser la nature de la fonction que la répartition discontinue de la masse. De plus, on sait qu'en empêchant le potentiel d'une surface de passer à travers la surface matérielle, on le rend monodrome; de même, il est possible de signaler à l'intérieur d'un corps

certaines surfaces susceptibles d'anéantir la propriété du potentiel extérieur d'être polydrome, quand on ne laisse pas percer ces surfaces par le potentiel. Pour cela on peut surtout employer des surfaces où deux branches de la fonction, en se réunissant, prennent les mêmes valeurs.

Si l'on suppose encore qu'il n'existe pas de surfaces limites de la fonction potentielle (au delà de laquelle on ne pourrait la continuer), et qu'elle satisfasse à certaines conditions lorsqu'elle devient infinie pour quelques points et lignes, on peut, en effet, répartir une masse convenablement sur des surfaces (ou bien sur des lignes et des points), de sorte que son potentiel devienne identique avec celui de la masse qui remplit le corps. Ces surfaces sont appelées *surfaces potentielles*. Il n'est guère nécessaire d'ajouter que ces surfaces doivent être non fermées ; car, d'après un théorème connu de Gauss, toute surface fermée qui renferme des masses peut être couverte de masse, en sorte que le potentiel des points extérieurs égale celui de la masse incluse.

L'auteur se borne au cas où la masse a une densité constante, et il construit, en particulier, les surfaces potentielles pour des corps limités par des surfaces quelconques du second degré. La solution de ce problème spécial offre une nouvelle application des transcendantes elliptiques, et l'auteur, élève de M. Weierstrass, s'est servi des formules que ce géomètre emploie dans son Cours sur les fonctions elliptiques, mais qu'il tarde toujours encore à publier dans un ouvrage systématique.

Kiepert (L.). — *Sur les courbes dont l'arc est une intégrale elliptique de première espèce.* (20 p.)

La lemniscate $r^2 = \cos 2\varphi$ et la courbe $r^3 = \cos 3\varphi$ ont été employées quand on avait besoin de courbes dont les arcs s'exprimassent par des intégrales elliptiques de première espèce. On connaît cette particularité de la lemniscate depuis l'époque du comte Fagnano et d'Euler, tandis que l'autre courbe a été étudiée nouvellement par M. Kiepert à diverses reprises. Actuellement, après avoir montré quel chemin il faut prendre pour arriver d'une manière générale à des courbes qui sont douées de cette propriété, l'auteur en développe de nouvelles, par exemple :

$$18 r^5 \cos 5\varphi = 27 r^{10} - 5 r^4 - 5 r^2 + 1$$

(courbe du dixième degré), et une autre plus compliquée dont il a tracé la figure, ainsi que celle de la courbe du dixième degré. Les calculs deviennent très-longs; mais il semble que les résultats gagnés ici puissent tourner au profit de la transformation des fonctions elliptiques.

Hermite (Ch.). — *Extrait d'une Lettre à M. L. Fuchs (sur quelques équations différentielles linéaires)*. (15 p.; fr.)

En 1873, M. Hermite a publié, dans les *Comptes rendus de l'Académie*, des recherches sur la fonction exponentielle, où il a développé des modes d'approximations simultanées de plusieurs fonctions. La Lettre à M. Fuchs, auteur d'un grand nombre de beaux Mémoires sur la théorie des équations différentielles linéaires, vient étendre cette nouvelle méthode aux intégrales de quelques équations linéaires dont on trouve le type à l'entrée. Ce sont des rapports de la théorie des fractions continues avec certaines équations du second ordre qu'avaient fait connaître les recherches de M. Heine et de M. Christoffel. M. Hermite prouve qu'ils sont susceptibles d'extension : il établit des fractions rationnelles qui doivent être regardées comme analogues aux réduites de la théorie des fractions continues, parce qu'elles donnent l'approximation de l'ordre le plus élevé possible, et qu'on peut chercher à leur égard un algorithme semblable à la loi de formation de ces réduites.

Hermite (Ch.). — *Lettre à M. Borchardt sur la fonction de Jacques Bernoulli*. (6 p.; fr.)

Soient $B''(x)$ et $B'(x)$ les coefficients de $\frac{\lambda^{2m}}{1.2\ldots 2m}$ et $\frac{\lambda^{2m+1}}{1.2\ldots 2m+1}$ dans le développement suivant les puissances croissantes de λ de la fonction $\frac{e^{\lambda x}-1}{e^x-1}$. Il existe de nombreux théorèmes sur ces fonctions $B''(x)$ et $B'(x)$. Raabe avait donné à $B''(x)$ la forme d'une intégrale définie très-intéressante. M. Hermite retrouve, par une nouvelle voie, cette formule et d'autres.

Borchardt (C.-W.). — *Otto Hesse* (né le 22 avril 1811, mort le 4 août 1874). (3 p.)

Notice sur les travaux de ce géomètre. E. L.

NACHRICHTEN VON DER K. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN UND DER GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT ZU GÖTTINGEN.

Année 1871 ([1]).

ENNEPER (A.). — *Remarques nouvelles sur la théorie des lignes asymptotiques.* (22 p.)

Recherches des surfaces gauches pour lesquelles les lignes asymptotiques ont la propriété que la distance de deux de ces courbes, mesurée dans la direction des génératrices, soit constante.

KLEIN (F.). — *Sur la théorie de la surface de Kummer et des complexes du second degré qui s'y rapportent.* (6 p.)

KOHLRAUSCH (F.). — *Le magnétomètre compensé de Weber pour la détermination de l'intensité magnétique terrestre.* (6 p.)

Le développement de cette Note a été donné dans les *Mathematische Annalen.*

KLEIN (F.). — *Sur un théorème de la théorie des complexes, qui est analogue au théorème de Dupin sur les surfaces orthogonales.*

LISTING (J.-B.). — *Sur l'oculaire de Huyghens.* (14 p.)

CLEBSCH (A.). — *Remarques sur la théorie des équations du cinquième et du sixième degré.* (5 p.)

Cette Note traite des propriétés relatives aux invariants et de la résolution des équations du cinquième et du sixième degré par la théorie des fonctions elliptiques.

CREMONA (L.). — *De la représentation sur le plan des surfaces algébriques.* (20 p.)

L'auteur montre que les transformations rationnelles des points de l'espace donnent un moyen simple d'obtenir les représentations connues des surfaces sur le plan, ainsi que d'autres de surfaces nouvelles.

LIE (S.). — *Sur la théorie relative à un espace à n dimensions, qui correspond à la théorie de la courbure dans l'espace à trois dimensions.* (19 p.)

([1]) Voir *Bulletin*, t. III, p. 42.

Généralisation des notions de normales, de courbure, de systèmes orthogonaux. — Indication d'un moyen de déduire d'un système orthogonal à n dimensions un autre système orthogonal à une dimension de moins.

Enneper (A.). — *Des surfaces qui admettent une surface donnée pour lieu des centres de courbure.* (33 p.)

Clausius (R.). — *Sur l'application d'une équation mécanique établie par l'auteur au mouvement d'un point matériel autour d'un centre fixe et de deux points matériels l'un autour de l'autre.* (22 p.)

Nöther (M.). — *Sur les fonctions algébriques d'une et de deux variables. Deuxième Note.* (12 p.)

L'auteur fait connaître une méthode générale pour transformer une courbe donnée avec des points singuliers quelconques en une autre courbe, admettant seulement des points multiples ordinaires. Déjà M. Cayley a montré (*Quart. Journ.*, 1866, vol. VII, p. 212) comment on peut utiliser les développements en série de M. Puiseux pour évaluer le nombre de points doubles et de rebroussements équivalant à une singularité quelconque. La transformation actuelle indiquée par l'auteur permet aussi de résoudre directement cette importante question de l'influence des points singuliers sur la classe et le genre.

Clebsch (A.). — *Sur l'interprétation géométrique des transformations d'ordre supérieur des formes binaires et des formes du cinquième ordre en particulier.* (11 p.)

Résumé d'un travail qui a paru *in extenso* dans les *Mathematische Annalen.*

Heine (E.). — *De quelques hypothèses qu'exige la démonstration du principe de Dirichlet.* (8 p.)

Hattendorff (K.). — *Détermination de la loi de mortalité au moyen d'observations données.* (16 p.)

LISTE DES TRAVAUX DE M. PAINVIN.

I.

Thèses soutenues en 1854.

1. *Thèse de Physique mathématique.* — Sur les vibrations d'une couche ellipsoïdale comprise entre deux ellipsoïdes homofocaux.
2. *Thèse d'Astronomie.* — Recherche du dernier multiplicateur pour deux formes spéciales des équations différentielles du Problème des trois Corps. (Insérée dans le Journal de Liouville, 1854, p. 88).

II.

Principaux travaux insérés dans les *Nouvelles Annales.*

3. Étude de la courbe qui coupe, sous un angle constant, toutes les génératrices d'un cône du second degré. (1854, p. 306.)
4. Description mécanique de certaines courbes. (1856, p. 139.)
5. Solution d'une question de minimum. (1856, p. 239.)
6. Solution d'une question relative aux normales à une courbe. (1857, p. 85.)
7. Application de la nouvelle Analyse aux surfaces du second ordre. (1858-1861.)
8. Équation des rapports anharmoniques correspondant aux racines d'une équation du quatrième degré. (1860, p. 407.)
9. Théorèmes sur les coniques inscrites à un quadrilatère. (1863, p. 156.)
10. Recherche des points multiples à l'infini dans les courbes algébriques. (1864, p. 145, 193, 241.)
11. Détermination des foyers d'une section plane d'une surface du second ordre. (1864, p. 481.)
12. Étude des points à l'infini dans les surfaces du second ordre. (1864, p. 481.)
13. Théorèmes généraux sur les diamètres dans les coniques. (1865, p. 498.)
14. Théorèmes sur les surfaces du second ordre. (1866, p. 240, 336; 1867, p. 288.)
15. Note sur l'interprétation des formules qui donnent les angles des droites et des plans dans l'espace. (1866, p. 337.)
16. Formules générales donnant les axes d'une section plane dans une surface quelconque du second ordre. (1867, p. 432.)
17. Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre. (1868-1869.)

18. Note sur la transformation homographique. (1870, p. 97.)
19. Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. (1870, p. 202, 256.)
20. Note sur la construction géométrique des normales à une conique. (1870, p. 348.)
21. Lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les côtés sont normaux à une surface du second ordre. (1871, p. 337.)
22. Note sur un système variable de trois directions rectangulaires. (1871, p. 414.)
23. Nombre des systèmes de plans que peut représenter une équation du second degré. (1871, p. 433.)
24. Théorèmes sur les surfaces. (1871, p. 481.)
25. Étude d'un complexe du second ordre. (1872.)
26. Axes, plans cycliques dans les surfaces du second ordre. (1874, p. 113.)
27. Note sur la méthode d'élimination de Bezout. (1874, p. 278.)

III.

Travaux insérés dans le Journal de Liouville (1re série).

Thèse d'Astronomie. (*Voir* plus haut. T. XIX, p. 88.)

IV.

Travaux insérés dans le Journal de Liouville (2e série).

28. Sur un certain théorème d'équations linéaires. (T. III, p. 41.)
29. Théorèmes sur la décomposition en facteurs linéaires des fonctions homogènes entières. (T. VI, p. 209.)
30. Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles. (T. XVII, p. 177.)
31. Courbure en un point d'une surface définie par son équation tangentielle. (T. XVII, p. 219.)
32. Étude d'un système de rayons. (T. XIX, p. 57.)

V.

Travaux insérés dans le Journal de Borchardt.

33. Propriétés du système des surfaces du second ordre conjuguées par rapport à un tétraèdre fixe. (T. LXIII, p. 58.)
34. Recherche des points à l'infini sur les surfaces algébriques. (T. LXV, p. 112, 198.)
35. Courbure en un point multiple d'une surface. (T. LXXI.)

VI.

Travaux insérés dans les *Annali di Matematica.*

36. Étude de la courbure en un point multiple d'une courbe plane. (T. IV, p. 215.)
37. Détermination des plans osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche. (T. IV, p. 281.)

VII.

Travaux insérés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

38. Note sur la réduction d'un certain système d'équations différentielles ordinaires à l'intégration d'une équation aux différentielles partielles renfermant un nombre moitié moindre de variables. (T. XLIV, p. 787.)
39. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles simultanées. (T. XLVII, p. 693.)
40. De la décomposition en facteurs linéaires des fonctions homogènes d'un nombre quelconque de variables. (T. XL, p. 84, 600 et 682.)
41. Mémoire sur les tétraèdres; détermination du volume maximum d'un tétraèdre dont les surfaces ont des aires données. (T. LIV, p. 379. *Nouvelles Annales,* 1862, p. 267, 353, 414.)
42. Mémoire sur la réfraction astronomique.
43. Étude des points à l'infini dans les surfaces algébriques. (T. LIX, p. 666.)
44. Sur la théorie des surfaces polaires d'un plan. (T. LX, p. 927.)
45. Sur la courbure en un point multiple d'une courbe ou d'une surface. (T. LXVIII, p. 131.)
46. Étude analytique de la développable circonscrite à deux surfaces du second ordre. (T. LXVII, p. 816.)
47. Détermination des plans osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche. (T. LXVIII, p. 796.)
48. Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable, définie par ses équations tangentielles. (T. LXX.)
49. Recherche des conditions pour qu'une conique ait, avec une courbe donnée, un contact d'ordre donné. (T. LXXVIII, p. 55.)
50. Conditions pour qu'une conique ait, avec une courbe d'ordre donné, un contact du cinquième ordre. (T. LXXVIII, p. 436.)
51. Condition explicite pour qu'une conique ait un contact du cinquième ordre avec une courbe donnée. (T. LXXVIII, p. 835.)
52. Sur les courbes unicursales. (T. LXXVIII, p. 1194.)

VIII.

Travaux originaux insérés dans le *Bulletin des Sciences mathématiques.*

53. Étude d'un complexe du second ordre. (T. II, p. 368.)
54. Courbure d'une courbe plane donnée par son équation tangentielle. (T. III, p. 174.)
55. Sur l'abaissement de la classe d'une courbe produit par la présence d'un point de rebroussement. (T. IV, p. 131.)
56. Note sur l'intersection de deux courbes. (T. V, p. 138.)

IX.

Travaux insérés dans les Mémoires de la Société des Sciences de Lille.

57. Propriétés des points d'inflexion dans les courbes du troisième ordre et des points de rebroussement dans les courbes de troisième classe. (1863.)
58. Étude analytique de la développable circonscrite à deux surfaces du second ordre. (1874.)

X.

Ouvrages séparés.

59. Traité d'Arithmétique (1855).
60. Traité d'Algèbre (1856).
61. Application de la nouvelle Analyse aux surfaces du second ordre (1861).
62. Principes de la Géométrie analytique.
    Géométrie analytique plane (1868).
    Géométrie de l'espace (1re Partie, 1869).
    Géométrie de l'espace (2e Partie, 1870).

Il reste à publier un travail important sur les coniques osculatrices, qui a été confié à la Rédaction des *Annales scientifiques de l'École Normale.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Bunte (B.). — Hygini Astronomica ex codicibus a se primum collatis; accedunt prolegomena, commentarius, excerpta ex codicibus, index epimetron. — Lipsiæ, T.-O. Weigel, 1875. In-8°, 130 p. 5 fr. 35 c.

Clebsch (A.). — Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet und herausgegeben von Dr F. Lindemann mit einem Vorworte von F. Klein, Ersten Bandes erster Theil. — Leipzig, Teubner, 1875. In-8, 496 p. 15 fr.

Première Partie d'une publication complète, et qui paraît devoir être fort volumineuse, des Leçons du regrettable Clebsch. M. Lindemann, qui s'est chargé de ce travail, indique les parties qui appartiennent à Clebsch, au moins partiellement, et celles qu'il a été obligé de refaire en entier. Nous reviendrons sur cet Ouvrage.

Cremona (L.), directeur de l'École d'Application des Ingénieurs à Rome. — Éléments de Géométrie projective, traduits, avec la collaboration de l'auteur, par Ed. Dewulf, chef de bataillon du Génie, officier de la Légion d'honneur, etc. Second fascicule. — Paris, Gauthier-Villars, 1875. In-8° avec figures dans le texte, p. 161-272. Prix de l'Ouvrage complet : 6 fr.

Fiedler (W.), Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. — Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, für Vorlesungen an technischen Hochschulen und zum Selbstudium. Zweite Auflage. — Leipzig, Teubner, 1875. In-8°, LIV-762 p. 24 fr.

Nous rendions compte récemment de la première édition de cet excellent Ouvrage, que l'auteur avait publié principalement pour être utile à ses élèves. Le rapide succès de cette première édition montre que l'Ouvrage répondait à un besoin réel, en dehors même de l'enseignement de M. Fiedler. La nouvelle édition a été encore améliorée, quoique le plan et les lignes principales de l'Ouvrage n'aient subi aucune modification.

Neumann (C.), professor an der Universität zu Leipzig. — Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme. — Leipzig, Teubner, 1875. In-8°, 240 p. 9 fr. 75 c.

Riemann (B.).— Schwere, Elektricität und Magnetismus, nach den Vorlesungen von Bernhard Riemann bearbeitet von K. Hattendorff. — Hannover, Carl Rümpler, 1876. In-8°, x-358 p. 10 fr. 75.

Nous rendons compte de cet intéressant Ouvrage qui vient compléter d'une manière si heureuse les Leçons, déjà publiées par M. Hattendorf, de Riemann sur la Physique mathématique.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

NEUMANN (Dr CARL), Professor an der Universität Leipzig. — DIE ELEKTRISCHEN KRÄFTE. Darlegung und Erweiterung der von A. Ampère, F. Neumann, W. Weber, G. Kirchhoff entwickelten mathematischen Theorien. — Erster Theil : Die durch die Arbeiten von A. Ampère und F. Neumann angebahnte Richtung. — Leipzig, 1873. B.-G. Teubner ([1]).

« Lentement, petit à petit, croissent les Sciences, et tard on parvient à la vérité par mainte erreur. Tout doit avoir été préparé par un long et constant effort pour l'apparition d'une vérité nouvelle ; alors il vient un moment où elle jaillit d'elle-même, comme par une nécessité divine. » Ces mots de Jacobi, que M. Carl Neumann a mis en guise d'épigraphe au frontispice de son livre sur les *Forces électriques*, sont admirablement en situation, lorsqu'on songe à la rapidité avec laquelle la théorie de l'électromagnétisme s'est développée entre les mains d'Ampère, immédiatement après la découverte de l'action des courants fermés sur l'aiguille aimantée, découverte à laquelle se bornent les droits du Danois OErsted. Aujourd'hui nous sommes de nouveau dans la période d'élaboration, de préparation patiente qui précède les grandes découvertes ; car il s'agit maintenant de frayer la voie à celui qui trouvera la théorie mécanique de l'électricité, qui réunira dans une synthèse simple et générale les faits épars et les formules isolées.

« L'établissement d'une théorie *satisfaisante* des phénomènes électriques », dit M. C. Neumann, « est peut-être un problème réservé aux siècles à venir. Tout ce qui, pour le moment, peut être fait dans cette direction, c'est de nous appliquer à explorer le terrain de ces phénomènes en tous sens, et en l'abordant des côtés les plus divers. Dans la partie de mon Ouvrage que je publie aujourd'hui, je me suis efforcé de poursuivre la route indiquée par les travaux d'Ampère et par ceux de mon père. Plus tard, je tâcherai d'explorer avec le même soin celle qui a été tracée par Weber et Kirchhoff. »

Voici en peu de mots le plan de l'important travail que nous avons

([1]) NEUMANN (Carl), professeur à l'Université de Leipzig. — *Les forces électriques*. Exposition et extension des théories mathématiques développées par A. Ampère, Fr. Neumann, W. Weber, G. Kirchhoff. 1re *Partie :* La route frayée par les travaux d'Ampère et de Fr. Neumann. Leipzig, 1873. Teubner, 1 vol. in-8° de XV-272 pages.

sous les yeux, et qui, loin de se borner à un simple exposé des recherches d'Ampère et de Franz Neumann, nous fait faire un pas de plus vers la connaissance des lois qui régissent les phénomènes, encore si obscurs, de l'induction électrique.

L'auteur divise les forces électriques en forces *électrostatiques* et forces *électrodynamiques;* ces dernières se scindent elles-mêmes en deux catégories nouvelles : les forces *pondéromotrices,* découvertes par Ampère, et les forces *électromotrices,* dont la découverte est due à Faraday. Les lois qu'on a trouvées pour le mode d'action de ces deux espèces de forces s'appliquent, les unes aux courants fermés, les autres aux éléments des courants; il faut, en conséquence, distinguer des lois *intégrales* et des lois *élémentaires.* Une loi élémentaire et une loi intégrale pour chacune des deux catégories de forces électrodynamiques, cela fait en tout quatre lois qu'il faut établir pour réduire en corps de doctrine la science des phénomènes de l'électromagnétisme et de l'induction. Les deux lois intégrales, pour les forces pondéromotrices et pour les forces électromotrices, M. F. Neumann les a établies en 1847, en partant de la loi élémentaire des forces pondéromotrices trouvée par Ampère vingt ans auparavant. La loi élémentaire des forces électromotrices (ou forces d'induction) paraît encore enveloppée d'une obscurité profonde; les formules proposées par Weber (1846) et par F. Neumann (1847) ne se ressemblent guère; ce dernier a même proposé deux formules différentes sans se prononcer en faveur de l'une ou de l'autre. C'est la recherche méthodique de cette loi inconnue qui fait l'objet principal de l'Ouvrage que vient de publier M. Carl Neumann.

On sait que les deux lois trouvées par M F. Neumann reposent sur la considération du potentiel des courants fermés.

1° Le travail pondéromoteur, accompli par un courant fermé B sur un courant fermé A dans le temps dt, a pour mesure la dérivée partielle du potentiel réciproque P des deux courants, prise par rapport au déplacement du circuit A; c'est ce qui peut s'exprimer par l'équation

$$dT_A^B = -\frac{\partial P}{\partial \tau}\, dt,$$

où τ est le temps t considéré comme argument ou paramètre des coordonnées de A.

Le potentiel P a pour expression

$$P = -A^2 I I_1 \sum\sum \frac{\cos\omega}{r} ds\, ds_1,$$

ou bien

$$P = -A^2 I I_1 \sum\sum \frac{\cos\theta \cos\theta_1}{r} ds\, ds_1,$$

où θ, θ_1 sont les angles que ds, ds_1 forment avec la ligne r qui joint les deux éléments, et ω l'angle que ds forme avec ds_1.

2° La somme des forces électromotrices induites pendant le temps dt par le courant B dans A est égale à l'accroissement total du rapport $\frac{P}{I}$, multiplié par un coefficient ε (I étant l'intensité du courant A); en d'autres termes, elle est égale à $\varepsilon d(I_1 Q)$, le potentiel réciproque étant exprimé par $I I_1 Q$. On suppose que les courants sont uniformes, c'est-à-dire que l'intensité est la même pour tous les points d'un même circuit.

La loi d'Ampère nous apprend que l'action réciproque de deux éléments de courant ds, ds_1 est égale à une constante multipliée par le produit

$$I I_1 ds\, ds_1 \frac{3\cos\theta\cos\theta_1 - 2\cos\omega}{r^2}.$$

Les expériences d'où cette loi a été déduite ne sont peut-être pas à l'abri de toute objection; néanmoins M. C. Neumann a cru devoir la prendre pour base de ses recherches, attendu que depuis cinquante ans elle a résisté à tous les efforts qu'on a faits pour l'ébranler. Il adopte également, comme suffisamment vérifiées par l'expérience, les deux lois de F. Neumann et la forme attribuée par ce dernier au potentiel de deux courants fermés.

Les hypothèses sur lesquelles s'appuie ensuite M. C. Neumann pour établir la loi élémentaire des actions électromotrices sont les suivantes : C'est d'abord le principe des forces vives, étendu à un système matériel quelconque, de manière qu'il comprend les phénomènes de chaleur; puis la loi de Joule, concernant la chaleur que développe un courant. Ce sont ensuite les hypothèses fondamentales d'Ampère sur l'action réciproque de deux éléments de courant : cette action, en tant que pondéromotrice, est dirigée suivant la ligne qui joint les deux éléments; elle est proportionnelle au

produit des intensités des deux courants, etc., et chaque élément peut être remplacé par ses trois projections. Enfin M. C. Neumann suppose que la force *électromotrice* induite en un point quelconque m d'un conducteur donné par un élément de courant $I_1 ds$, dans le temps dt, se compose de deux forces respectivement proportionnelles à I_1 et à ds_1, et qui ne dépendent plus, en dehors de ces facteurs, que de la situation relative et du changement de la situation relative de l'élément ds_1 et du conducteur influencé. Ces forces s'annulent lorsque l'intensité I_1 et la situation relative de ds_1 et de m ne varient point.

La loi élémentaire de l'induction à laquelle M. Neumann se trouve conduit par ces hypothèses peut s'exprimer comme il suit : La force électromotrice que l'élément de courant $I_1 ds_1$ fait naître en un point m dans le temps dt se réduit à deux forces dirigées, l'une suivant la ligne r qui joint ds_1 à m, l'autre suivant ds_1, et représentées, la première par

$$-\frac{A^2}{r^2} ds_1\, d(r I_1 \cos\theta_1),$$

la seconde par

$$+\frac{A}{r^2} ds_1\, I_1\, dr.$$

En partant de cette loi élémentaire et de celle d'Ampère, on retrouve les deux lois intégrales de F. Neumann, lesquelles n'avaient été établies, comme on sait, que pour le cas des conducteurs linéaires, mais qui peuvent être modifiées de manière qu'elles embrassent les conducteurs à trois dimensions. Ajoutons que M. C. Neumann n'accepte pas d'emblée, pour l'intensité des actions réciproques de deux éléments, la loi du carré inverse de la distance; il introduit une fonction inconnue de r qui ne se réduit à $\frac{1}{r^2}$ que pour des distances qui dépassent une certaine limite. Nous nous sommes contenté de transcrire ici les formules plus simples relatives à ce dernier cas. Dans beaucoup de recherches, il sera plus prudent de s'en tenir à la fonction inconnue de la distance, comme on le fait lorsqu'il s'agit de l'attraction moléculaire, qui est la cause des phénomènes de la cohésion, de l'élasticité, etc. M. Lamont s'est vu également conduit à fonder sa théorie du magnétisme sur l'existence d'une induction

moléculaire infiniment plus puissante que l'induction à distance, ou induction ordinaire, qui décroît en raison inverse du carré de la distance, et qui est la seule dont il soit question dans la théorie de Poisson.

L'hypothèse d'Ampère, d'après laquelle l'action réciproque (action pondéromotrice) de deux éléments de courant a lieu suivant la ligne qui joint les deux éléments, a été plus d'une fois contestée dans ces derniers temps. M. Neumann a tenté d'en faire abstraction, et il est encore retombé sur les deux lois élémentaires des forces électrodynamiques, telles qu'on les obtient en partant de l'hypothèse en question, ce qui lui paraît un nouvel argument en faveur de la théorie d'Ampère ([1]).

M. Helmholtz est l'un de ceux qui ont voulu remplacer la loi d'Ampère par une loi différente, fondée sur d'autres principes; il admet l'existence d'un potentiel élémentaire d'où se déduirait directement l'action réciproque de deux éléments de courant ([2]). Mais les formules qui se déduisent de cette loi hypothétique n'expliquent pas la rotation des courants mobiles sous l'influence d'un aimant ou d'un multiplicateur circulaire, car le moment de rotation ainsi calculé est égal à zéro. M. Helmholtz a essayé d'écarter cette objection capitale, en alléguant que la rotation qu'on observe provient d'une action qui a pour siége le point de contact de l'extrémité du courant mobile avec le liquide conducteur; mais ce raisonnement ne semble pas assez concluant pour justifier l'adoption de la loi nouvelle. Ce potentiel élémentaire, qui est, à proprement parler, l'élément de l'intégrale double par laquelle on représente le potentiel ordinaire, ne saurait être substitué à la loi d'Ampère que dans certains cas spéciaux (comme lorsque les circuits considérés sont formés par des fils rigides), et à titre de loi *apparente;* il donne, pour l'action réciproque de deux éléments, une force et un couple.

On n'a peut-être pas attaché assez d'importance à d'autres tentatives qui ont été faites pour arriver d'une manière directe à une loi élémentaire des actions réciproques des courants (actions pondéromotrices de M. Neumann), et parmi lesquelles il faut citer celles

---

([1]) *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften;* 1873.

([2]) *Monatsbericht der Berliner Akademie;* février 1873.

de MM. Grassmann, Hankel, Reynard. Hankel explique l'électricité par des tourbillons d'atomes, et parvient ainsi à rendre compte des attractions et des répulsions; mais la loi à laquelle il arrive pour l'action réciproque de deux éléments de courants n'est point celle d'Ampère, c'est celle de Grassmann : la pression résultante est *normale* à l'élément qui la subit. Peut-être, en développant cette théorie, s'assurerait-on si la loi d'Ampère est la seule conforme aux faits, et s'il faut définitivement rejeter les six autres lois que M. Stefan a récemment communiquées à l'Académie des Sciences de Vienne ([1]) comme également possibles, et dont deux satisfont à la condition de l'égalité de l'action et de la réaction.

La marche suivie par M. Neumann pour établir ses formules est un modèle de circonspection et de rigueur mathématique; il ne fait pas un pas en avant sans s'être assuré de la solidité du terrain, et l'on ne perd jamais des yeux un seul instant la ligne qui sépare les hypothèses plausibles des vérités démontrées. Des tentatives comme celle qu'il vient de mener à bonne fin ont une grande importance, parce qu'elles coordonnent et relient entre eux les résultats d'une foule de recherches dont on n'aperçoit toute la fécondité que lorsqu'elles se trouvent rapprochées de manière à s'éclairer mutuellement. Il faut maintenant souhaiter que M. Neumann tente d'appliquer ses formules à quelques-uns des problèmes pratiques qui préoccupent aujourd'hui les physiciens. Les appareils d'induction, les machines magnéto-électriques et dynamo-électriques ont pris une si grande place dans la science et dans l'industrie, qu'une théorie de l'induction, accommodée aux besoins de la pratique, rendrait les plus grands services. Jusqu'à présent les inventeurs ont dû marcher sur ce terrain à tâtons, n'ayant pour se guider qu'un petit nombre de lois générales. Des formules appropriées à des cas spéciaux, des règles pratiques, seraient certainement bien venues, et en définitive c'est toujours là que les théories nouvelles trouvent leur consécration dernière. R. R.

([1]) *Wiener Sitzungsberichte*; 1869.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

T. LXXXI; 1875, 2e semestre (suite).

N° 8. Séance du 23 août 1875.

Le Verrier. — *Comparaison de la théorie de Saturne avec les observations. Masse de Jupiter. Tables du mouvement de Saturne.*

« J'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie les théories analytiques des quatre planètes supérieures : Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

» Elles devaient être comparées aux observations, comme l'ont été antérieurement les théories des quatre planètes inférieures : Mercure, Vénus, la Terre et Mars.

» Le travail a été effectué pour Jupiter : j'ai rendu compte à l'Académie du résultat, dans la séance du 12 janvier 1874.

» Les observations de Jupiter faites pendant cent vingt ans, soit à Greenwich, soit à Paris, se sont trouvées représentées avec toute l'exactitude désirable : d'où l'on conclut que Jupiter n'est soumis à aucune action sensible autre que celles qui résultent des planètes connues.

» Le travail correspondant concernant la planète Saturne, que je présente aujourd'hui à l'Académie, a offert quelques légères difficultés de plus.

» N'en exagérons pas l'importance. Pendant les trente-deux années des observations modernes, de 1837 à 1869, l'écart entre la théorie et le calcul reste au-dessous de 2″,5 d'arc (moins de $0^s,2$ dans les temps des passages observés au méridien), à l'exception des deux années 1839 et 1844, où les écarts atteignent 4″,5 d'arc ($0^s,3$ sur les temps des passages).

» Dans les observations anciennes seulement, aux temps de

(¹) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 149.

Maskelyne et de Bradley, on rencontre quelques écarts un peu plus forts.

» Eût-on pu négliger ces minimes quantités? Nous avons pensé que l'Académie verrait avec satisfaction que ses astronomes apportent en ces matières difficiles la plus grande rigueur, et nous avons fait tous nos efforts pour y jeter quelque lumière.

» Dès qu'un écart est signalé entre la théorie et l'observation, quelque faible qu'il soit, la question se pose de savoir s'il vient d'un état incomplet de l'Analyse ou d'une erreur dans l'observation elle-même.

» Lorsque nous dûmes signaler, il y a déjà un grand nombre d'années, le désaccord de la théorie et des observations de Mercure, ces dernières, consistant en des passages de Mercure sur le Soleil, étaient fort exactes, et l'on ne pouvait douter que les variations inexpliquées n'affectassent la planète elle-même. Elles disparaissaient toutes en admettant un mouvement un peu plus rapide du périhélie, explicable par l'action d'une matière cosmique ou par l'action de petits astres plus voisins du Soleil que la planète, astres dont des passages sur le disque du Soleil ont été aperçus par divers astronomes, sans qu'on ait jusqu'ici réussi à les coordonner.

» Mars, à son tour, offrit dans son mouvement des anomalies qu'on faisait aussi disparaître par l'accroissement du mouvement du périhélie, accroissement indispensable, d'où nous pûmes conclure dès lors la nécessité d'augmenter la masse de la Terre, et par conséquent la parallaxe du Soleil.

» La question qui se soulève peut-être aujourd'hui à l'égard de Saturne est délicate, en raison même de la petitesse des écarts, qui rendent beaucoup plus difficile de prononcer sur leur cause.

» Avant tout, était-il possible d'affirmer que, dans la théorie analytique du mouvement de Saturne, théorie compliquée, il n'aurait pas pu se glisser quelque incertitude dans l'un des termes, si nombreux?

» A plusieurs reprises, nous avons fait la vérification de l'ensemble des expressions et, de plus, nous avons comparé tous leurs termes à ceux de la théorie de Jupiter, auxquels ils se relient par des rapports qu'on peut établir.

» Nous ne sommes arrivé ainsi qu'à reconnaître que le nombre de combinaisons de termes qu'il faudrait considérer en toute rigueur

dans le second ordre est presque illimité et que beaucoup de très-petits termes du même genre, loin de se détruire les uns les autres, s'ajoutent. On trouve, dans le second ordre, des termes assez sensibles allant jusqu'au septième degré.

» Par là nous avons été conduit à penser que, pour mettre la théorie hors de cause, il conviendrait de considérer la théorie analytique comme une première approximation déjà fort exacte et permettant de recourir aux méthodes d'interpolation, pour obtenir par un seul calcul l'expression complète de chacun des coefficients des séries, en ayant à la fois égard aux termes des différents ordres et des divers degrés.

» Déjà, à l'origine des travaux relatifs à Jupiter et Saturne, nous avions eu l'intention de suivre cette méthode, ainsi que nous l'avons dit dans le Chapitre XVIII; mais nous y avions renoncé, en raison de son extrême complication.

» La nécessité nous y ramenait impérieusement aujourd'hui. Le travail a été effectué et il a pris successivement assez d'étendue pour constituer une seconde théorie de la planète, dans laquelle nous estimons qu'il ne peut rester aucune incertitude.

» J'ai l'honneur de présenter à l'Académie ce travail, dans l'exécution duquel j'ai été puissamment aidé par mon collègue, M. Gaillot. Il sera sans doute nécessaire d'en effectuer la publication avec détails, dans l'intérêt des astronomes qui voudront continuer ces difficiles recherches.

» C'est donc en nous fondant sur une théorie dont l'exactitude n'est pas douteuse que nous avons effectué la comparaison suivante entre le calcul et les observations à notre époque. La comparaison est établie pour deux hypothèses différentes, faites sur la valeur de la masse de Jupiter : dans le premier cas, cette masse est supposée égale à $\frac{1}{1050}$; dans le second cas, à $\frac{1}{1046,77}$, nombre donné par Airy dans les *Mémoires de la Société Astronomique,* tome X, à la suite de ses recherches sur les élongations du quatrième satellite de Jupiter.

	Longitudes héliocentriques de Saturne (calcul—observation).		Latitudes héliocentriques de Saturne (calcul—observation).
	Masse de ♃.		
	$\frac{1}{1050}$	$\frac{1}{1046,77}$	
1837............	+1″,1	+0″,1	+1″,2
1838............	+5,2	+4,2	+0,0
1839............	+5,3	+4,4	+0,3
1840............	+3,5	+2,5	−0,5
1841-42.........	+1,3	+0,7	−0,1
1843-44.........	−4,6	−5,0	+0,5
1845-46.........	−2,1	−2,4	+1,2
1847............	+0,4	+1,5	−1,0
1848-49.........	−0,9	−1,1	−0,3
1850-51.........	−1,9	−2,3	−0,2
1852-53.........	−1,5	−1,7	+0,3
1854............	+0,7	+0,5	−0,1
1855-56.........	+2,7	+2,7	+0,9
1858-60.........	+2,5	+2,8	0,0
1861............	−1,2	−0,9	−0,3
1862............	−1,2	−1,1	0,0
1864............	−0,3	−0,2	0,0
1865............	−0,9	−0,6	−0,1
1866............	−1,9	−1,3	−0,8
1867............	−2,5	−1,5	−0,3
1868............	−2,2	−0,9	−1,3
1869............	−1,6	−0,1	−1,7

Anciennes observations.

1752,7..........	+6″,6	+7″,9	−1″,2
1755,6..........	+7,3	+8,0	−0,8
1758,0..........	+6,8	+7,0	+0,2
1761,0..........	+3,9	+3,8	+2,4
1769,0..........	−9,3	−9,5	−0,8
1774,7..........	−2,3	−2,9	−2,7
1782,6..........	+2,3	+1,1	−6,6
1788,8..........	−4,8	−6,4	+0,1
1792,1..........	−7,2	−8,9	−1,0
1797,0..........	−1,7	−2,7	−1,2
1804,2..........	−0,3	−0,1	+0,1

	Longitudes héliocentriques de Saturne (calcul—observation). Masse de ♃.		Latitudes héliocentriques de Saturne (calcul—observation).
	$\frac{1}{1050}$	$\frac{1}{1046,77}$	
1810,4..........	$-2'',1$	$-1'',1$	$+2'',7$
1813,7..........	$+2,5$	$+3,5$	$+0,1$
1818,9..........	$+4,9$	$+6,0$	$-1,2$
1822,1..........	$+0,7$	$+1,5$	$+0,6$
1825,9..........	$-7,3$	$-7,0$	$+1,6$

» Le tableau que nous venons de donner est uniquement basé sur les observations de Greenwich, seul observatoire où les séries s'étendent sans interruption pendant cent vingt ans, depuis 1751 jusqu'à 1869.

» On a d'ailleurs considéré aussi les observations effectuées à Paris depuis 1837 jusqu'en 1867. Les résultats ne diffèrent pas de ceux de Greenwich, ainsi qu'on peut s'en assurer par le tableau suivant des comparaisons faites entre les séries des deux observatoires.

Excès de la longitude héliocentrique de Saturne déduite des observations de Paris sur la longitude héliocentrique déduite des observations de Greenwich.

1837........	$0'',0$	1851.........	$+0'',8$
1838........	$+0,2$	1852.........	$+2,1$
1839........	$0,0$	1853.........	$-0,9$
1840........	$+0,5$	1854.........	$+1,4$
1841........	$+0,5$	1856.........	$+0,7$
1842........	$-2,0$	1858.........	$+0,9$
1843........	$+1,7$	1859.........	$+1,6$
1844........	$+0,4$	1860.........	$-0,4$
1845........	$-1,2$	1861.........	$-1,1$
1846........	$+0,3$	1862.........	$-0,4$
1847........	$0,0$	1863.........	$-0,1$
1848........	$-0,9$	1865.........	$+0,2$
1849........	$+0,5$	1866.........	$+0,6$
1850........	$+0,1$	1867.........	$-0,2$

» L'Académie constatera avec satisfaction la concordance des sé-

ries des deux observatoires, vérification qui s'applique également aux observations faites du temps d'Arago et aux observations faites à notre époque. Elle rassurera, au sujet de la précision du rôle de la France en ces matières difficiles, ceux de nos confrères qui ont pu avoir connaissance de tentatives regrettables faites dans le but de déprécier les travaux de notre pays.

» On voit, ainsi que nous l'avons dit, qu'on ne rencontre point d'écart sérieux entre la théorie et l'observation de 1846 à 1869.

» Il n'y aurait d'inquiétant dans les observations nouvelles que le passage assez brusque, en cinq ans, d'un écart de $+4'',4$ en 1839, à un écart de $-5'',0$ en 1844, variation de $9'',9$ en cinq ans, suivant les observations de Greenwich, de $9'',5$, suivant les observations de Paris.

» Les soins donnés à la théorie ne permettent pas de l'en rendre responsable; et d'ailleurs on ne voit pas quels termes ou quel groupe de termes pourraient ainsi troubler rapidement le mouvement en cinq ans, à une époque donnée, tout en respectant la régularité du mouvement pendant les vingt-cinq ans qui ont suivi.

» Nous sommes porté à conclure que l'écart constaté tient non à la théorie, mais aux observations elles-mêmes.

» Mais s'agit-il d'un mouvement réel du centre de gravité de la planète ou s'agit-il d'erreurs dans les observations?

» Nous écartons, comme de droit, tout effet qui serait dû à la présence des satellites.

» Reste la présence de l'anneau, qui ne peut non plus sans doute troubler le mouvement du centre de gravité de la planète, mais qui pourrait influer sur l'exactitude de l'observation?

» W. Struve et son fils, notre éminent confrère, M. Otto Struve, ont constaté une excentricité de l'anneau dont la loi nous est inconnue.

» En mettant encore cette cause de côté, il reste l'influence que les différents aspects de l'anneau doivent avoir sur l'exactitude des observations, suivant que, disparaissant complétement, il laisse voir la planète sous la forme d'un disque entier, ou bien que, se présentant dans sa forme évasée, il couvre de son ombre une partie variable du disque de la planète, laisse voir l'anneau obscur, permettant d'ailleurs quelquefois d'observer les deux bords de l'astre, et dans d'autres circonstances n'en laissant voir qu'un seul.

» Toutes ces circonstances si variées n'ont-elles pas dû apporter dans l'observation des temps des passages de la planète au méridien et produire sur les équations personnelles aux observateurs des perturbations qui, assez notables dans les observations anciennes, comme on en a déjà des exemples pour d'autres planètes, sont allées en diminuant à mesure que le système des observations s'est plus perfectionné, et particulièrement de nos jours.

» L'Académie sait que j'ai profité dernièrement de la présence de M. Struve pour lui demander avis sur ce sujet épineux.

» M. Struve, parti pour Leyde, m'écrit qu'il a mis la question en discussion dans le congrès astronomique qui s'y réunissait. Il va revenir à Paris et reprendra la parole.

» Quoi qu'il en soit, les Tables du mouvement de Saturne, fondées sur la comparaison de la théorie avec les observations, sont prêtes aujourd'hui. Elles vont être imprimées pour être mises à la disposition des astronomes.

» Nous demandons la permission de renvoyer à la prochaine séance ce que nous avons à dire au sujet de la masse de Jupiter, le sujet étant délicat et demandant quelques explications particulières. »

CHASLES (M.). — *Théorèmes dans lesquels entre une condition d'égalité de deux segments rectilignes.*

§ II. — ON CONSIDÈRE TROIS COURBES D'ORDRE ET DE CLASSE QUELCONQUES.

« X *a*. *Le lieu d'un point x pris sur la tangente d'un point θ d'une courbe* U^n, *et dont la distance à un point* P *est égale à la distance du point θ à un point* O, *est une courbe de l'ordre* $2(m+n)$.

» X *b*. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes* U^n, $U^{n''}$ *deux tangentes, dont la seconde est égale à la distance du point de contact de la première à un point* O, *est une courbe de l'ordre* $2(mn''+nm''+nn'')$.

» X *c*. *Le lieu d'un point x pris sur la tangente d'un point θ d'une courbe* U^n, *et dont la distance à un point* O *est égale à une tangente $\theta\theta'$ menée du point θ à une autre courbe* $U^{n'}$, *est une courbe d'ordre* $2(mn'+mn'+nn')$.

» X *d*. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes* U^n, $U^{n'}$ *deux tangentes $x\theta$, $x\theta'$, dont la seconde est égale à une tan-*

gente $\theta\theta''$ menée du point de contact θ de la première à une courbe $U^{n''}$, *est une courbe de l'ordre*

$$2\,[mn'(m''+n'')+nn''(m'+n')].$$

$$\left.\begin{matrix} x, & nn''(2m'+2n') & u \\ u, & n'(2m''+2n'')m & x \end{matrix}\right| .\ \text{Donc, etc.}$$

C'est-à-dire : D'un point x on mène n tangentes $x\theta$ de U^n; puis, des n points de contact, nn'' tangentes $\theta\theta'$ de $U^{n''}$; les tangentes de $U^{n'}$, de même longueur que ces nn'' tangentes, ont leurs extrémités sur nn'' courbes d'ordre $(2m'+2n')$; elles ont donc $nn''(2m'+2n')$ extrémités u sur L. D'un point u on mène n' tangentes $u\theta'$ de $U^{n'}$; les tangentes de $U^{n''}$, de même longueur, ont $n'(2m''+2n'')m$ extrémités θ sur U^n; les tangentes en ces points θ coupent L en $n'(2m''+2n'')m$ points x Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, deux points multiples d'ordre $nn'n''$ aux deux points circulaires; m points multiples d'ordre $2n'n''$ aux m points de U^n; m' points multiples d'ordre $2nn''$ aux m' points de $U^{n'}$, et $m''m$ points multiples d'ordre $2n'$ appartenant aux tangentes de U^n aux $m''m$ points de cette courbe situés sur les tangentes des m'' points de $U^{n''}$ à l'infini.

» XI *a. Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe* $U^{n'}$ *une tangente, dont un segment intercepté entre ce point et une courbe* U_m *soit égal à la distance du point de contact de la tangente à un point* O, *est une courbe de l'ordre* $2m(m'+2n')$.

» La courbe a, à l'infini, deux points multiples d'ordre mn' aux deux points circulaires; m points multiples d'ordre $2n'$ aux m points de U^n, et m' points multiples d'ordre $2m$ aux m' points de $U^{n'}$.

» XI *b. Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe* $U^{n'}$ *une tangente $x\theta$, dont un segment xa intercepté entre le point x et une courbe* U_m *soit égal à une tangente menée du point de contact θ à une autre courbe* $U^{n''}$, *est une courbe de l'ordre*

$$2m(m'm''+m'n''+2n'n''').$$

$$\left.\begin{matrix} x, & n'mn''2 & u \\ u, & 2(m'm''+m'n''+n'n'')m & x \end{matrix}\right|\ 2m(m'\ \ ''+m'n''+2n'n'').$$

» La courbe a, à l'infini, deux points multiples d'ordre $mn'n''$ aux deux points circulaires; m points multiples d'ordre $2n'n''$ aux m points de U_m, m' points multiples d'ordre $2mn''$ aux m' points

de $U^{n'}$, et $m''m'$ points multiples d'ordre $2m$, sur les tangentes de $U^{n'}$ en ses $m''m'$ points d'intersection par les tangentes des m'' points de $U^{n''}$ à l'infini.

» XII. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe* $U^{n'}$ *une tangente $x\theta$ égale à la distance de ce point x à un des points a où une tangente $\theta\theta'$ menée à une courbe* $U^{n''}$ *rencontre* U_m *est une courbe de l'ordre $mn''(3m'+n')$.*

» Établissant la correspondance entre deux points a, α de U_m, supposée unicursale, on pose

$$\left.\begin{array}{lll} a, & n''m'2m & \alpha \\ \alpha, & (2m'+n')n''m & a \end{array}\right| mn''(4m'+n').$$

C'est-à-dire : d'un point a de U_m on mène n'' tangentes $a\theta'$ de $U^{n''}$ qui coupent $U^{n'}$ en $n''m'$ points θ; les tangentes en ces points coupent L en $n''m'$ points x; le cercle décrit de chaque point x, d'un rayon égal à $x\theta$, coupe U_m en $2m$ points α, ce qui fait $2mn''m'$ points α. D'un point α on mène $(2m''+n')$ droites αx égales, chacune, à une tangente $x\theta$ (théorème III a) : les $(2m'+n')n''$ tangentes $\theta\theta'$ menées des points θ coupent U_m en $(2m'+n')n''m$ points a. Il y a donc $mn''(4m'+n')$ coïncidences de a et α.

» Il y a $mm'n''$ solutions étrangères dues aux mm' points d'intersection de U_m et $U^{n'}$ pris pour le point a de U_m. Il reste $mn''(3m'+n')$. Donc, etc.

» Les points de la courbe situés à l'infini sont : 1° $mn''m'$ points dus aux m points a de U_m situés à l'infini; 2° mm' points multiples d'ordre n'', sur les tangentes de $U^{n'}$ en ses mm' points d'intersection avec U_m; 3° m' points multiples d'ordre $n''m$ aux m' points de $U^{n'}$ à l'infini; 4° $n'n''$ points multiples d'ordre m sur les $n'n''$ tangentes communes à $U^{n'}$ et $U^{n''}$.

» XIII. *De chaque point a d'une courbe* U_m *on mène deux tangentes $a\theta$, $a\theta'$ à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$, *et sur la première on prend un point x dont la distance au point de contact θ' de la seconde soit égale à cette tangente $a\theta'$: le lieu de ces points x est une courbe de l'ordre $mn'(m''+3n'')$.*

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'mn''2 & u \\ u, & (m''+2n'')mn'\ (\text{IV}\,a) & x \end{array}\right| mn'(m''+4n'').$$

» Il y a $mn'n''$ solutions étrangères dues aux m points x de L situés sur U_m Il reste $mn'(m''+3n'')$. Donc, etc.

» XIV. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe $U^{n'}$ une tangente $x\theta$, égale à un segment aa' compris sur cette droite entre deux courbes U_m, U_{m_1}, est une courbe de l'ordre $2mm_1(m'+2n')$.*

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'mm_1 2 & u \\ u, & 2m(m'+2n')m_1 & x \end{array}\right| \quad 2mm_1(m'+3n').$$

» Il y a $2mm_1n'$ solutions étrangères dues aux points x de L situés sur les tangentes de $U^{n'}$ issues des deux points circulaires de l'infini. Il reste $2mm_1(m'+2n')$. Donc, etc.

» XV. *De chaque point a d'une courbe U_m on mène deux tangentes $a\theta$, $a\theta'$ à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$, et l'on prend sur la première, à partir de son point de contact, deux segments θx égaux à la seconde: le lieu des points x est une courbe de l'ordre*

$$2m(m'n''+m''n'+2n'n'').$$

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'mn''2 & u \\ u, & 2(m'n''+m''n'+n'n'')m & x \end{array}\right| . \text{ Donc, etc.}$$

» XVI. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$ deux tangentes $x\theta$, $x\theta'$, dont la première est égale à un segment xa fait sur la seconde entre le point x et une courbe U_m, est une courbe de l'ordre $mn''(2m'+3n')$.*

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'2mn'' & u \\ u, & n''m(2m'+n') & x \end{array}\right| . \text{ Donc, etc.}$$

» XVII. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe $U^{n'}$ une tangente $x\theta$ égale à un segment θa compris entre le point de contact θ et une courbe U_m, sur une tangente $\theta\theta'$ d'une courbe $U^{n''}$, est une courbe de l'ordre $mn''(3m'+2n')$.*

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'n''m2 & u \\ u, & 3mn''m'(\text{XVI}) & x \end{array}\right| \quad mn''(3m'+2n').$$

C'est-à-dire : D'un point x de L on mène n' tangentes $x\theta$ de $U^{n'}$; des points de contact θ, $n'n''$ tangentes $\theta\theta'$ de $U^{n''}$, qui coupent U_m en $n'n''m$ points a, et de chaque point θ on décrit un cercle de rayon θa, qui coupe L en deux points u, ce qui fait $2n'n''m$ points u. Un point u étant pris sur L, le lieu d'un point θ, d'où l'on mène à $U^{n''}$

une tangente $\theta\theta'$ sur laquelle U_m fait un segment θa égal à θu, est une courbe d'ordre $3n''m$, d'après le théorème XVI. Cette courbe a $3mn''m'$ points θ sur $U^{n'}$; les tangentes en ces points coupent L en $3mn''n'$ points x. Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, deux points multiples d'ordre $n'n''m$ aux deux points circulaires; $mn''m'$ points doubles dus aux m points de U_m à l'infini, et m' points multiples d'ordre $2n''m$ aux m' points de $U^{n'}$.

§ III. — Théorèmes relatifs a quatre courbes.

» XVIII. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$ deux tangentes $x\theta$, $x\theta'$ telles, que deux tangentes menées des deux points de contact θ, θ' à deux autres courbes $U^{n'''}$, $U^{n^{\text{IV}}}$ soient égales, est une courbe de l'ordre*

$$2\left[n'n'''m''(m^{\text{IV}}+n^{\text{IV}})+n''n^{\text{IV}}m'(m'''+n''')\right].$$

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'n'''(2m^{\text{IV}}+2n^{\text{IV}})m'' & x \\ u, & n''n^{\text{IV}}(2m'''+2n''')m' & u \end{array}\right| . \quad \text{Donc, etc.}$$

» XIX. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe $U^{n'}$ une tangente $x\theta$ égale à un segment $a\theta'$ compris sur une tangente $\theta\theta'$ d'une courbe $U^{n''}$, entre son point de contact θ' et une courbe U_m, est une courbe d'ordre $2m(m'm''+2m'n''+n'n'')$.*

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'n''m2 & u \\ u, & 2m(m''+2n'')m' \; [\text{XV ou XXVIII}] & x \end{array}\right| . \quad \text{Donc. etc.}$$

» La courbe a, à l'infini : 1° deux points multiples d'ordre $n'n''m$ aux deux points circulaires; 2° m' points multiples d'ordre $2n''m$ aux m' points de $U^{n'}$; 3° $mm'n''$ points doubles sur les tangentes des points θ de $U^{n'}$ qui se trouvent sur les tangentes de $U^{n''}$ menées des m points de U_m, situés à l'infini; 4° $m''mm'$ points doubles sur les tangentes des points θ où $U^{n'}$ est coupée par les tangentes des m'' points de $U^{n''}$ à l'infini.

» XX. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$ deux tangentes $x\theta$, $x\theta'$, dont la seconde rencontre une*

courbe U_m *en un point* a *d'où l'on mène à une courbe* $U^{n'''}$ *une tangente* $a\theta''$ *égale à la première* $x\theta$, *est une courbe de l'ordre* $2mn''(m'n''' + m'''n' + 2n'n''')$.

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'(2m''' + 2n''')mn'' & x \\ u, & n''mn'''(2m' + 2n') & u \end{array}\right| . \text{ Donc, etc.}$$

» XXI. *Le lieu d'un point* x *tel, que deux tangentes* $x\theta$, $x\theta'$, *menées de ce point à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$, *satisfassent à la condition qu'un segment* θa, *fait sur la première entre son point de contact et une courbe* U_m, *soit égal à une tangente* $\theta'\theta''$ *menée du point de contact de la seconde à une troisième courbe* $U^{n'''}$, *est une courbe de l'ordre* $2m[n'm''(m''' + n''') + n''n'''(m' + n')]$.

» XXII. *Le lieu d'un point* x *d'où l'on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $x\theta$, $x\theta'$ *telles, qu'une tangente menée du point de contact* θ' *de la seconde à une troisième courbe* $U^{n'''}$ *soit égale à la distance de ce point* θ' *à l'un des points* a *où la première tangente* $x\theta$ *rencontre une courbe* U_m, *est une courbe de l'ordre*

$$mn'(2m''m''' + 2n''n''' + m''n''').$$

» XXIII. *Le lieu d'un point* x *d'où l'on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $x\theta$, $x\theta'$, *sur lesquelles deux courbes* U_m, U_{m_1} *font deux segments égaux* $a\theta$, $a'\theta'$, *est une courbe de l'ordre* $2mm_1(m'n'' + m''n' + 2n'n'')$.

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'm\,(2m'' + 2n'')m_1 & u \\ u, & n''m_1(2m' + 2n')m & x \end{array}\right| . \text{ Donc, etc.}$$

» XXIV. *Le lieu d'un point* x *d'où l'on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $x\theta$, $x\theta'$, *dont la première* $x\theta$ *est égale à un segment* aa' *intercepté sur la seconde par deux courbes* U_m, U_{m_1}, *est une courbe de l'ordre* $2mm_1n''(m' + 3n')$.

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'4mm_1n'' & u \\ u, & n''mm_1(2m' + 2n') & x \end{array}\right| . \text{ Donc, etc.}$$

§ IV. — Théorèmes réciproques des précédents.

» La plupart des théorèmes qui précèdent donnent lieu chacun à un théorème différent, que l'on forme en prenant pour donnée dans

le nouveau théorème la conclusion du premier. Tous ces théorèmes se démontrent directement par les mêmes considérations, et seraient une vérification des premiers; mais les limites de cette Communication m'obligent de la restreindre aux énoncés seuls. J'indiquerai après chaque énoncé le théorème dont il est la réciproque.

» XXV. *On mène, de chaque point a d'une courbe* U_m, *une tangente* $a\theta$ *à une courbe* $U^{n'}$, *puis, du point de contact* θ *de cette tangente, une tangente* $\theta\theta'$ *à une courbe* $U^{n''}$, *et sur celle-ci on prend le point* x *dont la distance au point* a *de* U_m *se trouve égale à la tangente* $a\theta$: *le lieu de ces points* x *est une courbe de l'ordre* $mn''(3m'+n')$ [XII].

$$\begin{array}{lll} x, & n''m'm2 & u \\ u, & (2m'+n')mn'' & x \end{array} \Bigg| \; mn''(4m'+n').$$

» Il y a $m'n''m$ solutions étrangères dues aux m' points x de L, qui se trouvent sur $U^{n'}$. Il reste $mn''(3m'+n')$ coïncidences de x et u. Donc, etc.

» XXVI. *Le lieu d'un point* x *d'où l'on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $x\theta$, $x\theta'$ *telles, que la seconde* $x\theta'$ *soit égale à la distance de son point de contact à l'un des points où la première rencontre une courbe* U_m, *est une courbe de l'ordre*

$$mn'(m''+3n'')\,[\text{XIII}].$$

» XXVII. *Si, sur chaque tangente d'une courbe* $U^{n'}$, *qui rencontre deux courbes* U_m, U_{m_1} *en des points* a *et* a', *on prend un point* x *faisant un segment* xa *égal à un segment* $\theta a'$ *compris entre le point de contact* θ *de la tangente et un point de la courbe* U_{m_1}, *le lieu de ce point* x *est une courbe de l'ordre*

$$2mm_1(m'+2n')\,[\text{XIV}].$$

» XXVIII. *Le lieu d'un point* x *d'où l'on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes, dont la seconde est égale à un segment compris sur la première entre son point de contact et une courbe* U_m, *est une courbe de l'ordre* $2m(m'n''+m''n'+2n'n'')$ [XV].

» XXIX. *Si, de chaque point* a *d'une courbe* U_m *on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $a\theta$, $a\theta'$, *et que sur la seconde*

on prenne, à partir du point a, deux segments ax égaux à la première aθ, le lieu des points x est une courbe de l'ordre

$$mn''(2m' + 3n')\ [\text{XVI}].$$

» XXX. *On mène de chaque point a d'une courbe* U_m, *à une ourbe* $U^{n'}$, *une tangente* $a\theta$, *et du point de contact* θ *une tangente* $\theta\theta'$ *à une courbe* $U^{n''}$; *sur cette tangente on prend deux segmnets* θx *égaux à la tangente* $a\theta$: *le lieu des points* x *est une courbe de l'ordre* $mn''(3m' + 2n')$ [XVII].

$$\left.\begin{matrix} x, & n''m'm2 & u \\ u, & (m' + 2n')mn''[\text{IV}a] & x \end{matrix}\right| \ mn''(3m' + n'). \text{ Donc, etc.}$$

» XXXI. *De chaque point a d'une courbe* U_m *on mène une tangente* $a\theta$ *d'une courbe* $U^{n'}$, *et du point de contact* θ *une tangente* $\theta\theta'$ *d'une courbe* $U^{n''}$, *sur laquelle on prend deux segments* $\theta' x$ *égaux à la tangente* $a\theta$: *le lieu des points* x *est une courbe de l'ordre* $2m(m'm'' + 2m'n'' + n'n'')$ [XIX].

$$\left.\begin{matrix} x, & n''m'm2 \\ u, & 2(m'm'' + m'n'' + n'n'')m[\text{XXXVII}] \end{matrix}\right| \ 2m(m'm'' + 2m'n'' + n'n'').$$

» XXXII. *De chaque point a d'une courbe* U_m *on mène à deux courbes* $U^{n'}, U^{n''}$ *deux tangentes* $a\theta$, $a\theta'$, *et l'on prend sur la seconde les points* x, *d'où l'on peut mener à une troisième courbe* $U^{n'''}$ *des tangentes* $x\theta''$ *égales à la première tangente* $a\theta$: *le lieu de ces points x est une courbe de l'ordre*

$$2mn''[n'''(m' + n') + n'(m''' + n''')]\ [\text{XX}].$$

» XXXIII. *De chaque point a d'une courbe* U_m *on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $a\theta$, $a\theta'$, *et du point de contact de la seconde on mène les tangentes* $\theta'\theta''$ *d'une troisième courbe* $U^{n'''}$; *puis on prend sur la première deux segments* θx *égaux à chacune des tangentes* $\theta'\theta''$: *le lieu des points x est une courbe de l'ordre* $2m[n'm''(m''' + n''') + n''n'''(m' + n')]$ [XXI].

» XXXIV. *De chaque point a d'une courbe* U_m *on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $a\theta$, $a\theta'$, *et sur la première on prend un point x dont la distance au point de contact* θ' *de la*

seconde soit égale à une tangente menée de ce point θ' *à une troisième courbe* $U^{n'''}$: *le lieu de ce point* x *est une courbe de l'ordre* $mn'(2m''m''' + 2n''n''' + m''n''')$ [XXII].

» XXXV. *De chaque point* a *d'une courbe* U_m *on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $a\theta$, $a\theta'$, *et l'on prend sur la première deux segments* θx *égaux à chaque segment compris sur la seconde entre son point de contact* θ' *et une courbe* U_{m_1} : *le lieu des points* x *est une courbe de l'ordre*

$$2mm_1(m'n'' + m''n' + 2n'n'') \quad [\text{XXIII}].$$

» XXXVI. *De chaque point* a *d'une courbe* U_m *on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $a\theta$, $a\theta'$, *et l'on prend sur la seconde deux segments* $a'x$, *comptés à partir de chaque point* a' *d'une courbe* U_{m_1}, *égaux à la première tangente* $a\theta$: *le lieu des points* x *est une courbe de l'ordre*

$$2mm_1n''(m' + 3n') \quad [\text{XXIV}]. \text{ »}$$

Nicolaïdès. — *Intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles.*

Lucas (Éd.). — *De la trisection de l'angle à l'aide du compas.*

« Dans une Lettre de Descartes au P. Mersenne, en date du 8 octobre 1629, on trouve le passage suivant :

« De diviser les cercles en 27 et 29, cela se peut mécaniquement,
» mais non point géométriquement; il est vrai qu'il se peut en 27,
» par le moyen d'un cylindre, encore que peu de gens en puissent
» trouver le moyen, mais non pas en 29, et, si l'on m'en veut en-
» voyer la démonstration, j'ose vous promettre de faire voir que
» cela n'est pas exact. » (*Œuvres de Descartes,* éd. Cousin, t. VI, p. 56.)

» La construction des polygones réguliers de 9, 27, 81,... côtés se déduit du principe suivant, qui résout le problème de la trisection de l'angle en se servant de figures décrites à l'aide d'un compas sur la surface d'un cylindre de révolution. Soient, en effet, ABC la base d'un cylindre de rayon égal à l'unité, A l'origine des arcs, B et C les extrémités de l'arc donné a et de l'arc supplémentaire. Du point B comme centre on décrit sur la surface du cylindre une courbe sphérique passant par le point diamétralement opposé au

point B; sur la génératrice passant par le point C, on prend un point D dont l'ordonnée est égale au cosinus de l'arc donné, et de ce point D comme centre on décrit sur la surface du cylindre une seconde courbe sphérique passant par le point diamétralement opposé au point C.

» Ces deux courbes se coupent en quatre points situés dans un plan, sur un même cercle, et dont les ordonnées sont égales à $2\cos a$ et aux trois valeurs de l'expression $2\cos\frac{a+2k\pi}{3}$. Les projections sur la circonférence de base de ces quatre points d'intersection sont les extrémités de quatre arcs respectivement égaux à $2\pi - a$ et aux trois valeurs cherchées de l'expression $\frac{a+2k\pi}{3}$.

» Telle est, je pense, l'interprétation que l'on doit donner du passage de Descartes rapporté plus haut. La méthode employée permet aussi de construire les racines des équations du troisième et du quatrième degré. »

Mannheim (A.). — *Propriétés des diamètres de la surface de l'onde, et interprétation physique de ces propriétés.*

N° 9. Séance du 30 août 1875.

Le Verrier. — *Recherches sur Saturne. De la masse de Jupiter.*

« La masse de Jupiter entre comme élément dans la théorie de Saturne, et nous avions espéré qu'il serait possible d'obtenir par là la valeur exacte de cette masse, d'autant plus qu'on a prétendu la conclure d'observations beaucoup moins étendues, n'embrassant que soixante-quatorze ans au lieu des cent vingt années dont nous disposons aujourd'hui.

» Dans le VIe Livre de la *Mécanique céleste,* Laplace établit la masse de Jupiter à $\frac{1}{1067,09}$ de la masse du Soleil.

» Pour arriver à ce résultat, Laplace compare la chute du quatrième satellite vers la planète en une seconde de temps à la chute de Jupiter vers le Soleil dans le même intervalle de temps.

» Il doit à cet effet faire usage : d'une part, de la durée de la révolution du quatrième satellite, qu'il fixe à $16^{\text{jours}},689$, et qui est suffisamment connue par l'ensemble des observations faites pen-

dant de longues années; d'autre part, de l'élongation du quatrième satellite, qu'il admet de 1530^sec.déc.^,38. La quantité de cette élongation est le point délicat de la question.

» Laplace, dans le Xe Livre, dit qu'il a tiré l'élongation des observations de Pound, le contemporain de Newton, rapportées dans le troisième Livre des *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, observations dont il ne reste aucune trace, suivant ce que nous apprend M. Airy, dans son Mémoire de 1833, inséré au tome VI des Mémoires de la *Royal Astronomical Society*.

» Laplace revient sur le même sujet, non-seulement dans le livre X de la *Mécanique céleste*, mais dans l'*Exposition du Système du monde*, où il s'exprime ainsi, page 207, édition de 1824 :

« Les perturbations que les trois grosses planètes éprouvent par » leurs attractions réciproques offrent un moyen d'obtenir avec » une grande précision les valeurs de leurs masses. M. Bouvard, » en comparant à mes formules de la *Mécanique céleste* un très-» grand nombre d'observations qu'il a discutées avec un soin par-» ticulier, a construit de nouvelles Tables très-exactes de Jupiter, » Saturne et Uranus; il a formé, pour ce travail important, des » équations de condition dans lesquelles il a laissé comme indéter-» minées les masses de ces planètes, et, en résolvant ces équations, » il a obtenu les valeurs suivantes de ces masses :

$$\frac{1}{1070,5},\quad \frac{1}{3512},\quad \frac{1}{17918}.$$

» En appliquant mon analyse des probabilités aux équations de » condition de M. Bouvard, on a trouvé qu'il y a un million à pa-» rier contre un que la valeur de la masse de Jupiter à laquelle il » est parvenu n'est pas en erreur d'un centième de cette valeur. »

» Telle était donc la situation, lorsqu'on crut reconnaître, par la discussion des observations des petites planètes nouvelles, qu'il n'était pas possible d'expliquer la suite de leurs positions sans attribuer un accroissement à la masse admise pour Jupiter; c'est alors que M. Airy entreprit d'effectuer de nouvelles mesures de l'élongation du quatrième satellite, travail exposé dans les tomes VI, VII et VIII des Mémoires de la *Royal Astronomical Society*, et dont il a conclu que la masse de l'ensemble du système de Jupiter, y

compris les satellites, doit être portée à $\frac{1}{1046.77}$ de la masse du Soleil.

» Comment donc Bouvard avait-il pu tirer de la théorie de Saturne, comparée aux observations effectuées pendant soixante-quatorze ans, une valeur inexacte de la masse de Jupiter? Comment arrivait-il que cette valeur fût la même que celle qui avait été déduite des observations du quatrième satellite faites par Pound?

» Lorsque, me trouvant en possession d'une théorie de Saturne, pleine de difficultés, mais que je crois exacte, je reconnus que l'influence de Jupiter sur la longitude de Saturne dépassait 3800 secondes, je pus croire à mon tour que l'effet de termes si considérables permettrait de déterminer avec précision la masse de Jupiter.

» Je me gardai toutefois de me laisser prendre à ces premières apparences, et je considérai que les équations dans lesquelles figurait la correction μ^{iv} de la masse de Jupiter contenaient quatre autres inconnues principales, qu'il fallait avant tout déterminer en fonctions de μ^{iv}, puis éliminer, avant de rien pouvoir conclure.

» En partant des cent vingt années d'observations dont nous disposons, comparées avec la théorie, on trouve les expressions suivantes pour l'époque de 1850,0 :

Longitude moyenne.......	$14^\circ 52' 30'',58$	$+ 2837''\,\mu^{\text{iv}}$
Moyen mouvement sidéral.	$43996'',107$	$- 0'',429\,\mu^{\text{iv}}$
Excentricité..............	$11565,13$	$+ 186,8\,\mu^{\text{iv}}$
Longitude du périhélie....	$90^\circ 6' 42'',6$	$- 3518''\,\mu^{\text{iv}}$

» On voit que l'influence de la correction indéterminée μ^{iv} sur la valeur de chacun des éléments est considérable. Il en résulte que, lorsqu'on élimine des équations de condition les inconnues principales, les coefficients de μ^{iv} se détruisent en grande partie dans les résidus, et prennent des valeurs qui ne sont nulle part la dixième partie de ce qu'elles étaient dans les équations primitives; et, par ce fait, la précision sur laquelle on avait compté pour la détermination de la correction μ^{iv}, c'est-à-dire de la masse de Jupiter, s'évanouit.

» Encore raisonnons-nous ici sur les cent vingt années d'observations dont nous disposons actuellement, tandis que Bouvard n'a embrassé qu'une période de soixante-quatorze années, de 1747 à 1820.

» Or, dans ce cas, la diminution que subissent dans les résidus des équations les coefficients propres à déterminer les masses de Jupiter est encore bien plus considérable; en sorte qu'on peut dire qu'il ne reste rien pour obtenir cette masse, et que Bouvard l'a conclue d'un système d'observations où elle figurait à peine.

» Bien entendu, Bouvard avait appliqué à ses équations la célèbre méthode des moindres carrés, sans rien apercevoir du fond de la question.

» Mais nos confrères se demanderont sans doute comment il se fait qu'en opérant sur des données absolument insuffisantes Bouvard ait retrouvé la même masse à peu près que celle qui avait été déterminée antérieurement par les observations du quatrième satellite, fournissant ainsi à Laplace les éléments d'un calcul illusoire touchant la grande probabilité de l'exactitude du résultat.

» Bouvard n'a pas l'habitude de donner d'explications; on ne rencontre dans son travail aucune trace des éliminations dont nous avons parlé, et sans lesquelles rien ne pouvait être juste.

» On voit seulement que Bouvard a tout d'abord fait emploi de la masse de Jupiter jusqu'alors admise.

» Toute masse, prise arbitrairement dans de certaines limites, permet de satisfaire assez bien aux observations de Saturne, mais à la condition que cette même masse arbitraire soit introduite partout, dans les fonctions qui représentent la longitude moyenne, le moyen mouvement, l'excentricité, la longitude du périhélie, suivant les lois indiquées plus haut.

» Les éléments obtenus par Bouvard se sont donc trouvés représentés par ces fonctions de son arbitraire sans qu'il s'en soit rendu compte, et dès lors il n'a pu faire autrement que d'en retrouver la valeur au bout de ses calculs.

» L'emploi des élongations du quatrième satellite de Jupiter pour déterminer la masse de la planète a donc une supériorité incontestable à notre époque sur l'emploi de la théorie de Saturne, à cause du trop petit nombre d'années d'observations de Saturne dont on dispose; mais, avec le temps, cette supériorité s'amoindrira, et l'emploi des perturbations de Saturne reprendra l'avantage lorsque, ces perturbations ayant changé de sens, il restera, dans les résidus des équations, des coefficients de μ^{IV} égaux ou supérieurs à ceux des équations primitives.

» C'est absolument la même question que celle qui se présente à l'égard de la parallaxe du Soleil, qu'on peut déduire par deux méthodes : l'une géométrique, la méthode des passages de Vénus; l'autre mécanique, reposant sur les inégalités considérables du mouvement de Mars, par exemple.

» La méthode des passages, si importante à l'époque de 1760, mais limitée dans ses moyens, doit fatalement céder la place à la méthode des perturbations, dont l'exactitude va sans cesse en s'accroissant avec le temps. »

Faye. — *De la formation de la grêle.*

Puiseux (V.). — *Rapport sur un Mémoire de M. Haton de la Goupillière, intitulé : « Développoïdes directes et inverses d'ordres successifs ».*

« M. Haton de la Goupillière a soumis au jugement de l'Académie un Mémoire intitulé : *Développoïdes directes et inverses d'ordres successifs*. Sous cette dénomination empruntée à Lancret, l'auteur comprend les courbes qui se déduisent les unes des autres, en construisant pour chacune d'elles l'enveloppe des droites qui la coupent sous un angle constant, et il s'est proposé d'en donner la théorie avec plus de généralité qu'on ne l'avait fait jusqu'ici.

» Après avoir établi l'équation d'une développoïde directe ou inverse d'ordre quelconque, M. Haton en déduit diverses conséquences intéressantes et, par exemple, ce théorème, que la développoïde de la développée d'une courbe ne diffère pas de la développée de sa développoïde, et, plus généralement, qu'on peut intervertir d'une manière quelconque les angles sous lesquels on prend les développoïdes successives.

» L'auteur aborde ensuite le problème suivant :

» *Trouver une courbe qui ait pour $n^{\text{ième}}$ développoïde une courbe égale ou semblable.*

» Le problème analogue relatif aux développées successives avait déjà été résolu; mais l'extension de la solution au cas plus général traité par M. Haton n'était pas sans difficulté. Par une analyse ingénieuse, il est parvenu à résoudre complétement la question, en la ramenant à la résolution d'une équation aux différences mêlées,

finies et infiniment petites, dont l'intégrale est algébrique, dans le cas de la similitude inverse, et transcendante dans celui de la similitude directe.

» En résumé, dans le Mémoire renvoyé à notre examen, M. Haton de la Goupillière nous paraît avoir donné une solution élégante d'un problème intéressant qui n'avait pas encore été abordé avec ce degré de généralité, et nous proposons à l'Académie d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

N° 10. Séance du 6 septembre 1875.

BIENAYMÉ (J.). — *Application d'un théorème nouveau au Calcul des probabilités.*

« Il a paru dans le *Compte rendu* de l'avant-dernière séance (23 août 1875, n° 8, t. LXXXI, p. 351-353 et 377-379) plusieurs séries numériques d'observations qui m'ont semblé bien propres à montrer l'application d'un théorème nouveau du Calcul des probabilités, dont j'ai donné récemment l'énoncé à la Société Mathématique (*Bulletin* de cette Société, n° 5, t. II, p. 153, séance du 3 juin 1874). Il y a environ quinze ou vingt ans, une circonstance particulière m'obligea d'envoyer par la poste ma formule, qui me semblait de nature à terminer une discussion scientifique; et, à cette époque, je la communiquai à plusieurs personnes qui peuvent se le rappeler. Voici en quoi consiste ce singulier théorème : Si des observations quelconques sont rangées dans l'ordre où elles se sont présentées, et non classées arbitrairement, le nombre des maxima et des minima, ou des séquences [1], qu'on y comptera sera compris entre les limites

$$\frac{2n-1}{3} - t\sqrt{\frac{16n-29}{45}}$$

---

[1] Si l'on se représente les observations comme les ordonnées d'un polygone, le nom de *séquence* s'applique à la suite de côtés contigus de ce polygone, qui sont ascendants ou descendants entre un maximum et l'un des minima adjacents. Ainsi il y aura des séquences d'un seul côté, de deux, de trois; il ne peut en exister une de plus de $n-1$ côtés. Exactement, on peut compter le point d'origine comme maximum ou minimum et, par suite, une séquence de moins.

et

$$\frac{2n-1}{3} + t\sqrt{\frac{16n-29}{45}},$$

avec la probabilité approximative bien connue

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}\,dx,$$

n étant le nombre des observations et assez grand pour permettre de ne pas tenir compte de l'ordre de $\frac{1}{n}$ dans une approximation de ce genre. Il faut remarquer que cette formule ne s'applique en toute rigueur qu'à des observations dont la probabilité, quelconque d'ailleurs, est infiniment petite pour chacune, ou à des observations dont la probabilité est finie, mais qui ne peuvent se répéter. Lorsque des répétitions sont possibles, la valeur moyenne des nombres des maxima et des minima, ou des séquences, est modifiée. Par exemple, pour la répétition possible extrême, dans le cas qui ne laisse à l'observation que deux valeurs, le nombre moyen des maxima et minima, ou des séquences ascendantes et descendantes, n'est plus $\frac{2n-1}{3}$, mais seulement $\frac{n+1}{2}$; de sorte que, quelles que soient les répétitions, on peut dire que cette moyenne est comprise entre la moitié et les deux tiers du nombre des observations. Comme la différence de ces deux valeurs n'est que de $\frac{1}{6}$, on voit qu'il y a lieu de faire attention à des écarts qui, dans d'autres questions, pourraient être regardés comme insignifiants.

» Au surplus, il ne s'agit ici que du théorème relatif à la valeur $\frac{2n-1}{3}$: c'est le cas qui se présente à tout instant dans les observations de tout genre, dans les tirages de lots de toute espèce, etc. Les cas de répétitions sont beaucoup moins fréquents, et d'ailleurs il en est souvent qui se rangent dans les limites ci-dessus.

» Je passe aux épreuves que fournit le *Compte rendu* du 23 août. D'abord on trouvera dans la Note de M. Chapelas *sur les étoiles filantes du* 10 *août,* pour les ascensions droites du

commencement de la trajectoire de 225 de ces étoiles filantes :

P. 377, 1re colonne,	7	maxima ou minima	sur 13	observations.
» 2e »	11	»	13	»
P. 378, 1re »	43	»	64	»
» 2e »	39	»	65	»
P. 379, 1re »	22	»	35	»
» 2e »	24	»	35	»
Totaux.....	146	maxima sur	225	observations.

» La moyenne indiquée par la formule ci-dessus serait

$$\frac{2 \times 225 - 1}{3} = 149 + \frac{2}{3}.$$

L'écart des observations n'est donc que de $3 + \frac{2}{3}$, nombre qui n'exige même pas qu'on fasse $t = 1$ dans les limites $\pm t\sqrt{\frac{16n - 29}{45}}$, ce qui les réduit à 8,9, et ce qui n'élève pas la probabilité à 0,8427, soit un peu plus de 5 contre 1 (16 contre 3).

» Si maintenant on prend au même endroit les déclinaisons du commencement de la trajectoire des mêmes étoiles, on trouvera :

P. 377, 1re colonne,	9	maxima sur	13	observations.
» 2e »	9	»	13	»
P. 378, 1re »	50	»	64	»
» 2e »	39	»	65	»
P. 379, 1re »	24	»	35	»
» 2e »	23	»	35	»
Totaux.....	154	maxima sur	225	observations.

» La moyenne théorique est de $149\frac{2}{3}$; l'écart n'est donc que de $4\frac{1}{2}$, et, par conséquent, il est compris dans les limites précédemment calculées.

» La probabilité que ces deux valeurs se renfermeraient dans les mêmes limites ci-dessus n'était *a priori* que le carré de la précédente, soit 0,71 ou seulement $3\frac{1}{2}$ contre 1.

» On reconnaîtra de même pour les ascensions droites de la fin de la trajectoire :

P. 377, 1re colonne,		4 maxima sur		13 observations.	
»	2e	»	4	»	8 »
P. 378, 1re		»	41	»	60 »
»	2e	»	39	»	64 »
P. 379, 1re		»	23	»	35 »
»	2e	»	24	»	35 »
Totaux......			135	»	215 observations.

Ici la moyenne théorique n'est plus que de $\frac{2 \times 215 - 1}{3} = 143$. L'écart s'élève donc à 8. Mais les limites ne sont plus, pour la même probabilité, que de $\sqrt{\frac{16 \times 215 - 29}{45}} = 8,7$, et cependant cet écart s'y trouve encore renfermé. Ce fait mérite d'être observé, car d'assez fréquentes répétitions existent dans les séries d'étoiles filantes, de toute nécessité.

» Prenant enfin les déclinaisons de la fin des trajectoires, on constatera :

P. 377, 1re colonne,		9 maxima sur		13 observations.	
»	2e	»	6	»	8 »
P. 378, 1re		»	42	»	60 »
»	2e	»	39	»	64 »
P. 379, 1re		»	22	»	35 »
»	2e	»	23	»	35 »
Totaux......			141	maxima sur	215 observations.

L'écart est de 2 seulement, et il est largement compris dans les limites calculées.

» *A priori*, si ces quatre moyennes étaient complétement indépendantes, il n'y aurait pas eu plus de 1 contre 1 à parier qu'elles seraient toutes renfermées dans les mêmes limites, que déterminait $t = 1$, avec la probabilité 0,8427.

» A la page 353 du même numéro des *Comptes rendus*, M. Le Verrier fait connaître 28 observations d'une tout autre importance que les précédentes. Il s'agit de la différence entre les observations

faites à Greenwich et à Paris sur la longitude héliocentrique de Saturne. Ici, malgré le petit nombre des observations, la moyenne théorique $\frac{2 \times 28 - 1}{3} = 18 + \frac{1}{3}$ coïncide presque exactement avec le nombre des maxima et minima observés, qui est de 18. Les petites divergences d'un observatoire à l'autre ne donnent donc lieu à aucune remarque particulière. Et, en effet, le théorème s'appliquant à toute espèce de collection de grandeurs fortuites, il n'y a rien à conclure de ce qu'une série y satisfait, comme le font les deux exemples précédents. Mais il n'en est plus de même quand on relève dans la même Communication, pages 351-352, les 22 observations modernes de la longitude héliocentrique de Saturne faites à Greenwich et à Paris. Il ne se trouve que 9 maxima ou minima : c'est moins de moitié. Il en est de même pour les 16 observations anciennes, qui n'offrent que 8 maxima. Malgré la petitesse relative des nombres 22 et 16, il semblerait qu'une cause quelconque ait pu seule affaiblir systématiquement le nombre des maxima ou minima observés. Peut-être cette cause mériterait-elle d'être recherchée. C'est aux astronomes à en juger. Dans cette Note, il ne peut être question que de probabilités; mais les observations astronomiques n'échappent pas plus que les autres à l'examen de la théorie des probabilités, malgré l'extrême précision à laquelle elles sont parvenues entre les mains d'observateurs si habiles et de géomètres des plus renommés.

» La différence des valeurs employées dans deux calculs de la longitude héliocentrique de Saturne, pour la masse de Jupiter, ne produit, comme on peut le voir, aucun effet sensible sur les 28 observations. Elle paraît effectivement bien petite pour cette masse assez mal connue, malgré le nombre élevé qui représente cette grosse planète. J'ai déjà eu occasion (*Mémoire sur les erreurs d'après la méthode des moindres carrés*, présenté le 27 octobre 1851 à l'Académie, et publié dans le *Journal* de notre illustre confrère, M. Liouville, en 1852, puis plus tard dans le XVe volume du *Recueil des Savants étrangers*), j'ai déjà eu occasion de signaler combien la complication des équations peu nombreuses dont on avait déduit cette masse rendait petite la probabilité qu'on avait cru pouvoir y attacher. Il y aurait peut-être lieu de rechercher si les combinaisons dont on la déduit maintenant sont assez directes et embrassent

assez peu d'inconnues pour permettre de préciser une modification aussi faible que celle de $\frac{1}{1046,77}$ à $\frac{1}{1050}$.

» Quant aux 22 observations modernes et aux 16 observations anciennes de la latitude héliocentrique de Saturne, si le nombre des maxima des 22 modernes est de 13, ce qui avoisine la moyenne théorique $14+\frac{1}{3}$, le nombre des maxima des 16 anciennes n'est que de 7. Il semblerait dès lors qu'il y aurait eu un changement notable dans l'art d'observer les déclinaisons, changement dont les ascensions droites n'auraient pu profiter; mais, encore une fois, ces derniers nombres d'observations sont si petits pour le point de vue auquel le nouveau théorème les envisage, que c'est seulement à titre d'exemples qu'il a été permis d'en faire le sujet de quelques réflexions.

» Voilà tout ce qu'il semble utile de dire sur les nombres de l'avant-dernier *Compte rendu*. J'y ajouterai brièvement quelques autres exemples qui seront peut-être un peu moins faciles à retrouver, mais que néanmoins on pourra se procurer sans grand' peine.

» Et d'abord je citerai les ascensions droites et les déclinaisons de la Comète d'Olbers, qui sont rapportées dans l'ordre chronologique par Bessel (*Untersuchungen über die Bahn des Olbersschen Kometen. Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1812-1813). 183 ascensions droites exigeraient $121+\frac{2}{9}$ séquences avec un écart de $\pm 8{,}02 \times t$. L'observation ne donne que 112 séquences. L'écart de $9\frac{2}{3}$ emporte une probabilité supérieure à 5 contre 1, mais de bien peu. Du reste, il n'est pas surprenant qu'en multipliant ces épreuves, qui ne doivent tomber dans les limites calculées que 5 fois sur 6 (plus exactement 16 fois sur 19), on rencontre des cas qui en sortent plus ou moins.

» Pour les déclinaisons, quoiqu'il n'y en ait que 166 qui fournissent pour moyenne $110+\frac{1}{3}$ avec un écart de $+7{,}64$, on trouvera dans le Mémoire de Bessel 106 séquences ou 106 maxima et minima. La différence de la moyenne théorique n'est donc que de $+4+\frac{1}{3}$, rentrant complétement dans les limites et avec une probabilité très-faible.

» Dans une autre espèce de faits, on peut prendre dans les journaux les résultats du tirage exécuté le 20 juillet dernier pour l'emprunt de 1871 de la ville de Paris. Les 88 obligations sorties de-

mandent une moyenne de $58 + \frac{1}{3}$: le nombre réel est de 57. On voit que l'écart est réduit à $1 + \frac{1}{3}$, malgré la petitesse du nombre des observations, qui permettrait des limites égales à $\pm 5,53$ avec la probabilité déjà employée de 16 contre 3.

» On peut encore prendre pour épreuve les 255 obligations sorties au tirage du 3 juillet dernier, fait sur les titres si nouveaux des *tramways* des quartiers du nord de Paris. La même probabilité entraînerait une moyenne de 143 avec un écart de 8,7. Le nombre réel des séquences s'est trouvé de 140 (*Journal financier* du 1er août).

» Pour terminer enfin, on peut encore examiner le tirage du 2 août courant des obligations des villes de Roubaix et Tourcoing, au nombre de 376 (*Globe* ou *Réforme financière* du 15 août 1875). La moyenne théorique est de $\frac{2 \times 376 - 1}{3} = 250 + \frac{1}{3}$, avec un écart de $\pm 11,53$.

» Le nombre observé est de 245 séquences, qui n'offre qu'un écart de $5 + \frac{1}{3}$ et n'exigerait pas une probabilité de 1 contre 1.

» Les exemples à citer se présentent de tous côtés et tous les jours, mais il convient de s'arrêter. »

Langley (S.-P.). — *Étude des radiations superficielles du Soleil.*

Wolf (C.). — *Observations des étoiles filantes du mois d'août* 1875.

Catalan (E.). — *Note sur les nombres de Bernoulli.*

N° 11. Séance du 13 septembre 1875.

Bertrand (J.). — *Démonstration simple du théorème du Calcul des probabilités, énoncé par M. Bienaymé dans la séance précédente.*

Saint-Venant (de). — *Rapport sur un Mémoire de M. Lefort, intitulé : « Examen critique des bases de calcul habituellement en usage pour apprécier la stabilité des ponts en métal à poutres droites prismatiques, et propositions pour l'adoption de bases nouvelles ».*

Saint-Venant (de). — *Rapport sur un Mémoire de M. Boussinesq, intitulé : « Additions et éclaircissements à son Essai sur la théorie des eaux courantes ».*

WATSON (J.-C.). — *Mémoire sur les observations du passage de Vénus faites à Pékin.*

N° 12. Séance du 20 septembre 1875.

LE VERRIER. — *Résumé des observations du Soleil et des planètes Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus, faites à l'Observatoire de Paris pendant l'année* 1874.

BERTRAND (J.). — *Addition à la Note relative au théorème de M. Bienaymé publiée dans la séance précédente.*

JORDAN (C.). — *Sur la composition des covariants.*

Suite des études de l'auteur sur le beau théorème de M. Gordan.

N° 13. Séance du 27 septembre 1875.

RESAL (H.). — *Présentation du troisième volume de son « Traité de Mécanique générale ».*

« Ce volume est divisé en trois Sections :

» La première comprend l'étude des machines considérées au point de vue des transformations de mouvement, et notamment une théorie complète des principales coulisses employées dans les machines à vapeur.

» La deuxième Section a pour titre : *Des machines considérées au point de vue de la transformation du travail des forces.* Dans le Chapitre consacré aux volants, j'ai notamment traité le cas d'une machine à détente; de plus j'ai indiqué comment on peut tenir compte, par approximation, de l'inertie des pièces oscillantes et de l'obliquité des bielles; enfin j'ai établi les formules qui permetten de calculer les dimensions des différentes parties des volants.

» J'ai donné la théorie des principaux types de régulateurs à force centrifuge, non isochrones et isochrones, et celle du régulateur pneumatique de Larivière.

» Parmi les sujets traités dans le Chapitre consacré au calcul des résistances passives, je citerai une théorie complète de la transmission par câble, la détermination des effets du tir sur les différentes parties de l'affût d'une bouche à feu, enfin une théorie des freins.

» Dans le Chapitre intitulé : *Stabilité des machines,* je me suis spécialement occupé du mouvement d'un véhicule de chemin de fer

à quatre roues, en voie courbe horizontale, et de la stabilité des locomotives.

» Le dernier Chapitre de la deuxième Section se rapporte à la mesure du travail développé par les moteurs ou transmis aux machines.

» La troisième Section est consacrée aux applications de la Mécanique à l'Horlogerie, et comprend l'étude de la détente d'un ressort moteur, le calcul des résistances passives dans la marche d'un chronomètre, enfin les théories des régulateurs, du ressort spiral et des échappements. »

Le Verrier. — *Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Paris, pendant le premier trimestre de* 1874.

Fleuriais. — *Sur les particularités présentées par le phénomène des contacts pendant l'observation du passage de Vénus à Pékin.*

VIERTELJAHRSSCHRIFT der Astronomischen Gesellschaft (¹).

VIIe année; 1872.

Le volume commence par un Tableau dressé par M. Schönfeld, et faisant connaître, pour l'année 1872, les époques des maxima de 72 étoiles variables; il est suivi d'une éphéméride indiquant, pour chaque jour de l'année, les maxima ou minima qui peuvent être observés.

Posizioni medie di 1425 *stelle pel principio del* 1860.

Argelander rend compte de ce travail, exécuté à Padoue par plusieurs observateurs; il compare le Catalogue à ceux de Wolfers, de Schjellerup, et aux zones de Bessel, et en déduit les corrections en ascension droite et en déclinaison.

Gyldén (Hugo). — *Ueber eine Methode, die Störungen eines Cometen vermittelst rasch convergirenden Ausdrücke darzustellen.* (*Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XIV.)

Gyldén (H.). — *Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie.* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XVI.)

Les deux Mémoires ci-dessus de M. Gyldén se rapportent à un

nouveau développement de la fonction perturbatrice, lequel est encore très-rapidement convergent dans le cas des comètes, là où le développement ordinaire ne serait plus applicable. L'auteur est parti d'un Mémoire de Hansen, couronné par l'Académie des Sciences de Paris, dans lequel il expose ce qu'il appelle le *principe de la partition;* il divise l'orbite d'une comète dont il cherche les perturbations en plusieurs parties, de telle sorte que les coordonnées de la comète sont des fonctions de variables différentes, qu'il appelle *anomalies partielles,* tout le long de l'orbite. On comprend qu'en prenant un assez grand nombre des points de division on puisse réduire de beaucoup, dans chaque intervalle, les variations de la distance Δ de la comète à la planète troublante. Soient ω l'une des anomalies partielles de la comète, c' l'anomalie moyenne de la planète. On aura

$$(1) \quad \Delta^2 = A + B\sin\omega + D\cos\omega + E\sin 2\omega + F\cos 2\omega + \ldots,$$

où les coefficients A, B, ... sont tous de la forme

$$(2) \quad A = a_0 + a_1\cos c' + a_2\cos 2c' + \ldots + b_1\sin c' + b_2\sin 2c' + \ldots$$

La convergence de la série (1) peut, comme nous l'avons dit, être rendue très-grande. M. Gyldén représente par E la portion de la série (1) qui dépend de ω, par D l'autre, de sorte que

$$\Delta^2 = D\left(1 + \frac{E}{D}\right),$$

et

$$\Delta^{-n} = D^{-\frac{n}{2}}\left(1 + \frac{E}{D}\right)^{-\frac{n}{2}};$$

le rapport $\frac{E}{D}$ est une petite fraction; la difficulté se trouve être maintenant dans le développement des puissances négatives de D. La convergence du développement (1), relativement à la variable c', dépend de l'excentricité de la planète troublante, laquelle sera toujours petite dans notre système. M. Gyldén pose

$$D = (a_0 + a_1\cos c' + b_1\sin c')(1 + G),$$

(¹) Voir *Bulletin*, t. III, p. 16.

où

$$G = \frac{a_2 \cos 2c' + b_2 \sin 2c' + \ldots}{a_0 + a_1 \cos c' + b_1 \sin c'}.$$

On peut écrire

$$D = c(1 + G)\,[1 + f \cos(c' + F_1)];$$

f sera en général petit, et l'on développera aisément les puissances négatives de D. Cependant, si la partie considérée de l'orbite de la comète est voisine de l'orbite de la planète perturbatrice, f pourra être assez voisin de 1, et le développement des puissances négatives de $1 + f\cos(c' + F_1)$ ne conduira qu'à des séries très-peu convergentes. C'est ici le point important de la méthode de M. Gyldén. Il remarque que l'on peut écrire

$$1 + f\cos(c' + F_1) = \frac{(1 + K_1)^2}{1 + K_1^2}\,[1 - K^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(c' + F_1)],$$

en posant

$$\frac{2K_1}{1 + K_1^2} = f, \quad \frac{1 - \sqrt{1 - K^2}}{1 + \sqrt{1 - K^2}} = K_1.$$

Il est conduit ensuite à poser

$$\tfrac{1}{2}(c' + F_1) = \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} x, \quad (\text{mod. } k) \tag{3}$$

en désignant par K l'intégrale complète de première espèce et par k le module correspondant; on a ensuite

$$1 + f\cos(c' + F_1) = (1 + f)\left(\Delta \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} x\right)^2.$$

Les puissances négatives de cette quantité se développent, par les formules de la théorie des fonctions elliptiques, en séries très-convergentes, procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de x, lors même que K est voisin de 1. L'auteur donne ensuite les développements en séries périodiques de fonctions telles que

$$\left(\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} x\right)^n,$$

$$\left(\cos \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} x\right)^n,$$

$$\left(\Delta \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} x\right)^n,$$

puis des expressions plus compliquées, telles que

$$\left(\frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}\right)^{2n} (\Delta \operatorname{am} u)^m.$$

On voit, par ce qui précède, que, dans les deux Mémoires cités plus haut, M. Gyldén est arrivé à développer la fonction perturbatrice en une série très-convergente, procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de l'anomalie partielle ω de la comète, et de la variable x liée à l'anomalie moyenne de la planète par l'équation (3); il y est arrivé par un changement de variable. Il donne des exemples numériques de ces développements; les astronomes attendront avec impatience que M. Gyldén ait complété ses beaux travaux, en donnant le moyen de déduire du développement précédent, en fonction du temps, les perturbations des éléments elliptiques de la comète.

Cayley (A.). — *On the determination of the orbit of a Planet from three observations.* — (*Mem. of the Royal Astronomical Society*, vol. XXXVIII.)

M. Cayley donne, dans ce Mémoire, une solution géométrique du problème de la détermination de l'orbite d'une planète à l'aide de trois observations. Il remarque que l'orbite est une section conique ayant le Soleil pour foyer; les trois observations font connaître trois droites sur chacune desquelles est un point de la courbe. Si le plan de l'orbite était connu, il en serait de même des trois points, et l'on serait ramené à construire une section conique dont on donne un foyer et trois points, problème susceptible de quatre solutions; il montre qu'une seule de ces solutions convient au cas actuel. Il considère ensuite le pôle de l'orbite sur la sphère céleste héliocentrique. En s'imposant la condition que la planète mette un temps donné pour passer de la première position à la seconde, on ne déterminera pas entièrement le pôle de l'orbite, mais seulement un lieu de ce pôle; en faisant de même pour la seconde position et la troisième, on aura un autre lieu, et ces deux lignes par leur intersection détermineront l'orbite. M. Cayley construit les courbes dans un cas particulier, et il en fait connaître quelques autres très-intéressantes.

— *A Catalogue of* 1963 *stars and of* 290 *double stars, observed*

by the U.-S. Naval Astronomical Expedition to the Southern Hemisphere during the years 1850-1851-1852. — Washington, 1871.

Gilliss avait organisé, de 1849 à 1852, une expédition scientifique pour le Chili; il comptait en publier les résultats en six volumes : les deux premiers seraient consacrés à la Géographie, à l'Ethnographie et aux Sciences naturelles; les volumes 3, 4 et 5 contiendraient les résultats des observations astronomiques, et le sixième la Météorologie et le Magnétisme. Les trois premiers volumes ont paru depuis longtemps; dans le troisième se trouvent les observations de Mars et de Vénus, faites en vue de la détermination de la parallaxe du Soleil. La mort de Gilliss arrêta la publication; elle a été reprise par les astronomes de Washington, qui ont publié le Catalogue annoncé plus haut.

On trouvera dans le *Vierteljahrsschrift* des détails intéressants sur l'observatoire de Gilliss, sur la détermination de sa latitude, et enfin sur la précision apportée dans la mesure des coordonnées des 1963 étoiles du Catalogue.

— *Astronomische Tafeln und Formeln, herausgegeben von Dr* C.-F.-W. Peters. Hamburg, 1871.

M. Peters a publié la série des Tables entreprises d'abord par Schumacher en 1822, puis par Warnstorff en 1845, avec de nombreux changements et des additions importantes. Nous citerons parmi ces Tables celles qui servent à la conversion du temps moyen en temps sidéral, à la conversion des temps en fractions décimales du jour, au calcul des réfractions, à la mesure des hauteurs à l'aide du baromètre, etc.

Robinson (R.) and Grubb (T.). — *Description of the great Melbourne telescope.*

A la suite de la publication faite en 1847 du magnifique Ouvrage dans lequel J. Herschel a consigné le résultat de ses observations au Cap de Bonne-Espérance, le monde scientifique désira voir un puissant instrument établi à poste fixe, pour explorer le ciel des nébuleuses dans l'hémisphère austral. La *Société Royale Astronomique* de Londres fit des démarches actives auprès du Gouvernement anglais pour favoriser cette idée; ses efforts restèrent longtemps infructueux. En 1862 seulement, on décida d'installer à Melbourne un puissant télescope; l'instrument partit pour l'Australie en 1868.

Le miroir est métallique, il a 4 pieds de diamètre; le télescope est un télescope de Cassegrain, il est monté équatorialement; le miroir, le tube, les axes, les contre-poids pèsent, à eux seuls, plus de 8000 kilogrammes. Plusieurs astronomes se sont succédé en peu de temps à Melbourne, ce qui explique pourquoi on n'a pas encore fait d'observations bien suivies avec ce télescope gigantesque; nous citerons cependant les observations relatives à la nébuleuse d'Orion, à celle de η Argus, et une Carte très-détaillée des petites étoiles voisines de Sirius.

Möller (Ax.). — *Beiträge zu der neuen Bearbeitung der periodischen Cometen.*

M. Ax. Möller rend compte des calculs qu'il a exécutés pour représenter les observations de la comète de Faye, faites jusqu'à l'apparition de 1865-1866. Il a déterminé les perturbations avec le plus grand soin, et néanmoins, trouvant que la marche des différences, observation moins calcul, n'était pas très-satisfaisante, il a introduit dans ses calculs une nouvelle indéterminée, la correction de la masse de Jupiter. La résolution des équations lui a donné pour cette masse le nombre $\frac{1}{1047,79}$ tandis que Bessel avait trouvé $\frac{1}{1047,88}$; les deux nombres sont donc très-peu différents. Les observations se sont trouvées ensuite représentées d'une façon satisfaisante, et M. Möller en conclut qu'il n'y a pas lieu de supposer que la durée de la révolution de la comète aille en diminuant par suite de l'interposition d'un milieu très-rare.

— *Zusammenstellung der Planeten- und Cometen-Entdeckungen im Jahre* 1871.

Pendant l'année 1871, cinq planètes ont été découvertes, savoir :

(113)	Amalthée,	par Luther,	à Bilk.
(114)	Cassandre,	par Peters,	à Clinton.
(115)	Thyra,	par Watson,	à Ann-Arbor.
(116)	Sirona,	par Peters,	à Clinton.
(117)	Lomia,	par Borrelly,	à Marseille.

Dans la même année, trois comètes ont été découvertes, savoir :

La comète	I,	par Winnecke,	à Karlsruhe.
»	II,	par Tempel,	à Milan.
»	III,	par Tempel,	à Milan.

On a retrouvé, en outre, la comète de Tuttle de 1858, et la comète d'Encke. Cette dernière comète a été étudiée au spectroscope par Huggins.

— *Resultate aus Beobachtungen auf der Leipziger Sternwarte. I. Beobachtungen am Meridiankreis, von R. Engelmann.* Leipzig, 1870.

Le nouvel Observatoire de Leipzig a été construit dans les années 1860-1861 ; jusqu'en 1866, les instruments principaux de l'Observatoire étaient une lunette de Fraunhofer de 2 mètres de foyer, et un grand équatorial de Pistor et Martins de 4 mètres de foyer ; ces deux instruments servaient aux mesures des étoiles doubles, des petites planètes, des comètes, et à l'observation des nébuleuses ; en 1866, l'Observatoire, qui jusque-là n'avait possédé pour la détermination de l'heure qu'une petite lunette méridienne, s'enrichit d'un grand cercle méridien. M. Engelmann, dans le volume cité plus haut, publie les observations faites pendant deux ans et demi avec cet instrument. Le considérant d'abord comme instrument des passages, il donne des détails sur la détermination des constantes instrumentales et leur variation avec la température ; puis, le considérant comme cercle mural, il étudie la flexion, les erreurs de division, les erreurs des vis des microscopes, etc. ; enfin, il donne les observations qu'il a faites des étoiles d'Argelander.

Respighi (L.). — *Sulla scintillazione delle stelle.* (*Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, vol. XXI e XXII.*)

Dans ces deux Mémoires, M. Respighi étudie la scintillation des étoiles au moyen d'observations spectroscopiques. Il remarque que, quand une étoile est dans le voisinage de l'horizon, il apparaît dans son spectre des bandes sombres, d'autres brillantes, de largeur et de netteté variables, qui, avec une régularité, une vitesse plus ou moins grandes, se promènent d'un bout à l'autre du spectre, ou bien oscillent seulement d'une couleur à l'autre. L'inclinaison de ces bandes sur le prisme change quand on tourne le prisme ; elle

varie en outre avec la hauteur de l'étoile. M. Respighi cherche l'explication de ces phénomènes et d'autres analogues, et il trouve que les trois causes suivantes peuvent les produire : d'abord l'existence d'une dispersion atmosphérique sensible; ensuite l'existence, sur le parcours des rayons lumineux, de couches d'air ayant un indice de réfraction différent de celui qui environne l'instrument (cette différence n'étant pas seulement celle qui provient du changement régulier de densité des couches atmosphériques); enfin il pense qu'on doit tenir compte des mouvements relatifs différents de ces couches d'air, par rapport au faisceau qui pénètre dans la lunette. Partant de ces trois causes, il explique dans les cas les plus simples des apparences observées. M. Respighi fait remarquer que, si sa théorie est exacte, le spectroscope pourrait servir d'instrument météorologique, nous donnant des renseignements sur les conditions où se trouvent, non pas les couches d'air qui nous entourent, mais des couches très-éloignées, même jusqu'aux limites de l'atmosphère.

M. Bruhns, rendant compte de ce travail de M. Respighi, rappelle la théorie d'Arago et les recherches de M. Montigny et de M. C. Wolf, astronome de l'Observatoire de Paris.

Hornstein (K.). — *Ueber die Abhängigkeit der Erdmagnetismus von der Rotation der Sonne.*

Dans ce Mémoire, M. Hornstein cherche à trouver l'influence de la durée de la rotation synodique du Soleil sur la déclinaison et l'inclinaison magnétiques, et aussi sur l'intensité de la composante horizontale; c'est donc une extension de la corrélation trouvée entre la période décennale des taches et les variations de l'aiguille aimantée; il a trouvé dans les déclinaisons magnétiques de Prague et de Vienne une période de $26\frac{1}{3}$ jours.

Engelmann (R.). — *Ueber die Helligkeitsverhältnisse der Jupiterstrabanten.* Leipzig, 1871.

M. Engelmann a fait, dans le cours de l'année 1870, un grand nombre de mesures de l'intensité de la lumière des satellites de Jupiter, à l'aide d'un photomètre de Zöllner; il a discuté les erreurs de ses observations, donné de nouvelles déterminations des diamètres des satellites, et en a conclu des nombres représentant, pour chacun d'eux, la faculté plus ou moins grande qu'ils ont de réflé-

chir la lumière du Soleil. Il a cherché à trouver une relation entre les nombres et les anomalies jovicentriques correspondantes, afin de tirer quelques conséquences relatives à la rotation de ces petits corps sur eux-mêmes; il ne semble pas que les observations déjà réunies soient suffisantes pour qu'on puisse décider sur ce point; toutefois, pour le quatrième satellite, les observations indiquent assez clairement que la durée de sa rotation est égale à celle de sa révolution autour de Jupiter.

— *Berichte über die Arbeiten der norddeutschen Expeditionen zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss vom* 18. *August* 1868.

Deux expéditions allemandes ont été envoyées pour observer l'éclipse totale du 18 août 1868 : la première dans l'Inde, composée de MM. Spörer, Tietjen, Engelmann et Koppe; la seconde en Arabie, composée de MM. Tiele, Vogel, Zenker et Fritsch; la première devait s'occuper surtout des protubérances et de leur observation spectroscopique; la seconde était chargée principalement de la Photographie.

Le *Vierteljahrsschrift* donne un résumé très-complet des observations faites dans les deux stations; nous nous bornerons à signaler des mesures photométriques faites par M. Spörer, pour déterminer les intensités de la lumière de certaines étoiles de l'hémisphère austral, et des mesures prises avec soin sur les photographies de l'expédition d'Arabie, pour déterminer les hauteurs et les angles de position des protubérances.

Schiaparelli (J.-V.). — *Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen, aus dem Italienischen übersetzt und herausgegeben von* G. v. Boguslawsky. Stettin, 1871.

Nous allons donner une indication sommaire des matières contenues dans cet Ouvrage, qui est la traduction en allemand, avec de nombreuses additions, du premier Ouvrage de Schiaparelli sur les étoiles filantes :

Chapitre I. — Hauteur de l'atmosphère déduite de l'observation des étoiles filantes. — Influence de la résistance de l'air sur les orbites des météores. — Perte de vitesse et de force vive dans l'atmosphère; développement de chaleur par suite de la résistance de l'air.

Chapitre II. — Flux périodiques; Catalogues de points radiants. — Premier aperçu de la constitution des essaims d'étoiles filantes; théorie d'Erman, idées de Chladni. — Variation diurne du phénomène. — Identité des orbites de l'essaim des Perséïdes et de la comète III de 1862, et de l'essaim des Léonides et de la comète I de 1866. — Liaison entre les comètes et le phénomène des étoiles filantes.

Chapitre III. — Répartition des essaims dans l'espace, Catalogue de 189 points de radiation observés par Zezioli.

Chapitre IV. — Influence de l'attraction de la Terre sur la chute des étoiles filantes.

Chapitre V. — Des causes qui influent sur la visibilité et l'abondance des étoiles filantes.

Chapitre VI. — Explication des variations diurne, azimutale et annuelle.

Chapitre VII. — Perturbations exercées par la Terre ou d'autres planètes sur les orbites des essaims, explication probable des radiations multiples.

Chapitre VIII. — Formation des courants météoriques. — Division de la matière cométaire sous l'influence du Soleil et des planètes; dispersion de cette matière tout le long de l'orbite.

Chapitre IX. — Rapports entre les étoiles filantes et les bolides; l'origine des bolides est-elle stellaire ou cométaire?

Le volume se termine par huit Notes intéressantes; nous citerons entre autres la Note relative à la répartition des orbites des comètes dans l'espace.

— *Astronomical and meteorological observations made at the United States Naval Observatory during the years* 1865, 1866, 1867, 1868 et 1869.

Le volume de 1865 contient les observations méridiennes faites à l'Observatoire de Washington, des observations équatoriales de planètes et comètes, et des groupes stellaires de l'Écrevisse et des Pléiades. Vers la fin de 1865, l'Observatoire reçut un nouveau cercle méridien de Pistor et Martins; le cercle a 3 pieds et demi de diamètre, et la lunette 8 pouces d'ouverture, et 11 pieds de distance focale. Cet instrument a été employé depuis à la mesure des coordonnées des étoiles des éphémérides américaines et des corps

du système solaire; les observations sont publiées dans les volumes 1866-1869.

Parmi les Suppléments du volume de 1867 se trouve la détermination de la différence de longitude entre Washington et la Havane.

Klinkerfues (W.).— *Theoretische Astronomie*. Braunschweig, 1871-1872.

L'Ouvrage de M. Klinkerfues traite principalement de la détermination des orbites des planètes, comme les Ouvrages bien connus de Watson et d'Oppolzer; cependant il s'en distingue en un certain nombre de points sur lesquels nous appelons l'attention des lecteurs.

L'auteur traite avec détail la détermination de l'orbite, supposée circulaire, à l'aide de deux observations; il donne de cette question, qui se présente souvent, une autre solution qui lui a été communiquée par Gauss, et n'avait encore jamais été publiée. A propos de la méthode d'Olbers pour la détermination des orbites paraboliques, il indique des transformations élégantes dues également à Gauss.

Pour la détermination des orbites des planètes il profite des simplifications apportées à la méthode par Encke et par Hansen. Passant au calcul d'une orbite à l'aide d'un grand nombre d'observations, il indique des formules données par Jacobi, permettant de trouver par des calculs très-symétriques les valeurs des inconnues (supposées au nombre de 3), et leurs poids, résultant de l'application de la méthode des moindres carrés.

M. Klinkerfues traite aussi de la détermination des orbites des étoiles doubles; il donne d'abord la méthode de Herschel, puis une méthode d'approximation pour déterminer l'orbite à l'aide de six angles de position. Il fait connaître ensuite la théorie des apparitions que présente l'anneau de Saturne. Il indique le calcul de l'orbite d'un satellite, en ramenant ce cas à celui des étoiles doubles.

Nous signalerons enfin la détermination des orbites des flux périodiques d'étoiles filantes.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, herausgegeben von Dr O. SCHLÖMILCH, Dr E. KAHL und Dr M. CANTOR (¹).

T. XX, fasc. 1, 2, 3; 1875.

HOLZMÜLLER (G.). — *Contributions nouvelles à la théorie des transformations isogonales.* (16 p.)

Il s'agit dans cet article des transformations ponctuelles dans le plan, qui s'effectuent en conservant la similitude des éléments infiniment petits. Toute fonction d'une variable complexe donne naissance à une telle transformation. L'auteur étudie surtout les transformations qui dérivent de l'emploi de la fonction elliptique sinam z.

MILINOWSKI. — *Les centres harmoniques d'un système de quatre points, par rapport à un point donné comme pôle.* (37 p.)

Les propriétés des centres harmoniques ont jusqu'ici été surtout déduites du calcul. Dans le travail actuel, l'auteur s'est proposé d'obtenir, par des méthodes purement synthétiques, les propriétés du centre harmonique par rapport à un système de quatre points. Ces propriétés conduisent d'une manière directe à de nombreuses propositions relatives aux courbes du troisième et du quatrième ordre.

WITTWER (W.-C.). — *Sur les variations de densité de l'éther intermoléculaire.* (17 p.)

L'auteur, à l'encontre de plusieurs physiciens, pense que l'éther, dans le voisinage des atomes, est moins dense que dans leur éloignement; il se propose de justifier cette opinion par l'étude exclusive des phénomènes optiques, et voici ses conclusions :

Dans les corps pondérables la densité de l'éther est plus petite que dans l'espace environnant.

Dans les cristaux hexagonaux positifs, la densité atteint sa plus petite valeur dans la direction de l'axe principal, sa plus grande dans les directions perpendiculaires. C'est l'inverse qui a lieu pour les cristaux négatifs.

ZIMMERMANN (H.). — *Sur la résolution numérique de deux équations à deux inconnues.* (7 p.)

(¹) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 185.

La méthode proposée par l'auteur peut être regardée comme la généralisation de la règle des parties proportionnelles. Soient

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

les deux équations. Considérant les deux surfaces

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y),$$

l'auteur leur substitue deux plans assujettis respectivement à couper les deux surfaces en trois points choisis arbitrairement, mais aussi voisins que possible de leur point commun d'intersection avec le plan des xy.

Weiler (A.). — *Sur l'intégration de l'équation aux différentielles totales.* (6 p.)

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

L'auteur fait connaître d'abord la méthode d'Euler, qui, le premier, a donné une marche pour l'intégration de cette équation. Il expose ensuite le procédé que M. Natani a publié dans le *Journal de Crelle*, t. 58, p. 304, et enfin celui de M. du Bois-Reymond, exposé au tome 70 du même Journal, p. 307.

Weiler (A.). — *Sur l'intégration d'un système complet d'équations aux différentielles partielles de forme linéaire.* (9 p.)

L'auteur rappelle d'abord la méthode de Jacobi, puis celle de M. Mayer, dans un Mémoire inséré aux *Mathematische Annalen*, Mémoire dont nous publierons la traduction.

Matthiessen (L.). — *Sur la dispersion des couleurs dans les gaz.* (4 p.)

Günther (S.). — *Sur l'histoire des Mathématiques en Allemagne pendant le* XVe *siècle.* (14 p.)

Weihrauch (K.). — *Du nombre de solutions des équations indéterminées du premier ordre à coefficients premiers entre eux deux à deux.* (15 p.)

L'étude du nombre des solutions positives d'une équation indéterminée est une des plus intéressantes de l'Analyse; l'auteur l'aborde dans un cas simple, celui où les coefficients sont premiers entre eux, et il indique la marche à suivre pour résoudre la question posée.

WEIHRAUCH (K.). — *Sur l'expression $\Sigma f_n(m)$ et les transformations de la formule pour le nombre des solutions. Application de la formule à la théorie des combinaisons.* (6 p.)

La fonction $f_n(m)$ qui figure dans cet énoncé est le nombre des solutions de l'équation

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = m.$$

Cet article est la suite du précédent.

SILLDORF. — *Sur les systèmes de rayons du premier ordre et de la première classe, et sur les complexes linéaires.* (27 p.)

Dans ce travail étendu, l'auteur établit les théorèmes que M. Reye a fait connaître sans démonstration dans le 69e tome du *Journal de Borchardt,* et d'autres propositions nouvelles qui lui appartiennent en propre.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ENNEPER (A.). — Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Akademische Vorträge. — Halle, Nebert. 1 vol. in-8°. 16 M.

FAÀ DE BRUNO (F.). — Théorie des formes binaires. Résumé des Leçons faites à l'Université de Turin. — Paris, Gauthier-Villars, 1876. In-8°, 320 p. 16 fr.

WALTENHOFEN (A. von). — Grundriss der allgemeinen mechanischen Physik. — Die wichtigsten Lehrsätze der Mechanik fester, flüssiger und gasförmiger Körper, der mechanischen Wärme-Theorie und der Potential-Theorie, nebst einer mathematischen Einleitung für Studirende an Hochschulen und für Lehramtscandidaten. — Leipzig, Teubner, 1875. In-8, 362 p. 10 fr. 75 c.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

BAEYER (J.-J.). — UEBER DIE GRÖSSE UND FIGUR DER ERDE. EINE DENKSCHRIFT ZUR BEGRÜNDUNG EINER MITTEL-EUROPÄISCHEN GRADMESSUNG. — Berlin, 1861.

GENERAL-BERICHT ÜBER DIE MITTEL-EUROPÄISCHE GRADMESSUNG. Rapports annuels de 1863 à 1873. — Berlin, G. Reimer.

LISTING (J.-B.). — UEBER UNSERE JETZIGE KENNTNISS DER GESTALT UND GRÖSSE DER ERDE. — Göttingen, 1872.

Lorsque les astronomes croyaient la Terre sphérique, la mesure de ses dimensions était un problème fort simple, ne présentant qu'une seule inconnue, le rayon de la sphère. Les anciens avaient sur le moyen de le résoudre des idées très-exactes, et, si les résultats qu'ils nous ont transmis semblent discordants, cela tient très-probablement à l'ignorance où nous sommes sur le sens précis du mot *stade* à diverses époques. La circonférence du globe est en effet, suivant Aristote, de 400 000 stades, et de 10 000 seulement suivant Ptolémée ; les observations des astronomes anciens, quoique bien éloignées de la précision des nôtres, ne les exposaient pas à des divergences aussi considérables, et le stade d'Aristote est sans aucun doute plus court que celui de Ptolémée.

La méthode employée par eux est celle dont on fait encore usage aujourd'hui : après avoir choisi deux stations sur un même méridien et mesuré leur distance, on évalue l'angle des deux verticales, égal évidemment à la différence de leurs inclinaisons sur les lignes parallèles, dirigées de chacune d'elles vers une même étoile ou vers le centre du Soleil au moment de leur passage au méridien commun. Ératosthène, Hipparque et Posidonius dans l'antiquité, les astronomes du calife Almamoun au IXe siècle de notre ère, le médecin Fernel au XVIe siècle, Snellius, qui, au XVIIe siècle, exécuta les premières triangulations, ont employé avec des précautions inégales cette méthode, adoptée aussi par Picard lorsqu'il fut chargé en 1668, par l'Académie des Sciences de Paris, de rechercher avec la plus grande exactitude la longueur du rayon terrestre.

Une autre méthode, plus simple en apparence, mais soumise, dans la pratique, à de graves difficultés, a été proposée par Kepler

et employée par Riccioli : elle est indépendante de toute mesure astronomique. Si l'on cherche deux stations aussi éloignées que possible et telles cependant que de chacune d'elles on puisse apercevoir l'autre, il semble facile de mesurer les angles formés par la ligne qui les joint avec les verticales de ses deux extrémités ; leur différence est l'angle des deux verticales, et le rapport de cet angle à quatre angles droits est égal à celui de la distance des deux stations à la circonférence de la Terre. Il n'est pas nécessaire que les deux stations soient situées sur le même méridien. Les stations choisies par Riccioli étaient la montagne de Paterno, près de Bologne, et le sommet de la tour de Modène, dont les verticales forment un angle de $18'9'',5$. L'erreur commise, due sans doute à l'influence des réfractions, se trouva d'un dixième environ de la valeur cherchée. La même méthode, employée de nouveau en 1833 entre Strasbourg et Durlach, a indiqué entre les verticales de ces deux stations, distantes de 71058 mètres, un angle de 37 minutes, ce qui fournit, pour le quart de la circonférence de la Terre, 10037000 mètres, au lieu de 10000000, que l'on devrait trouver d'après la définition du mètre.

Newton, dans le livre des *Principes*, en adoptant la mesure de Picard comme la plus exacte et la plus sûre, montrait cependant la nécessité de la compléter par d'autres. Notre globe, en effet, animé d'un mouvement de rotation et liquide en grande partie à la surface, ne saurait conserver la forme d'une sphère ; il doit être enflé à l'équateur, l'équilibre des mers l'exige, et Newton n'a pas craint d'ajouter que l'état primitivement fluide de la croûte solide actuelle a dû le soumettre aux mêmes lois. C'est donc comme conséquence de considérations théoriques, pendant longtemps contestées, il est vrai, sur le continent, que l'aplatissement de la Terre a été pour la première fois annoncé aux astronomes. La détermination de ses éléments devenait un problème de Mécanique fort difficile, et qui, aujourd'hui encore, faute de données suffisantes, semble impossible à résoudre avec certitude.

La solution de Newton assignerait à la Terre la forme d'un ellipsoïde de révolution, et à l'aplatissement, rapport de la différence des axes au plus grand d'entre eux, la valeur $\frac{1}{239}$, qui n'est d'ailleurs proposée par lui que comme une première et douteuse approximation ; car, si la théorie lui permettait d'affirmer l'aplatisse-

ment aux pôles, de nombreuses et incertaines hypothèses conduisaient seules à en calculer la grandeur; la loi des densités dans l'intérieur de la Terre joue, en effet, un grand rôle dans la solution, et cette loi doit peut-être rester à jamais inconnue.

Huyghens, peu de temps après Newton, affirmait comme lui, et démontrait par des preuves semblables l'aplatissement de la Terre aux pôles, en lui assignant pour valeur $\frac{1}{579}$ seulement; mais les hypothèses sur lesquelles reposent les calculs n'avaient alors déjà, et ne peuvent avoir, aujourd'hui surtout, aucune vraisemblance; il suppose la pesanteur constante sur tous les points intérieurs de la Terre et aussi grande au centre qu'à la surface, tandis que la force d'attraction, cela est aujourd'hui de toute évidence, doit diminuer, quand la profondeur augmente, et s'annuler au centre.

Les mesures prises en France après l'apparition du livre de Newton semblèrent d'abord infirmer les assertions du grand géomètre. Dans un livre intitulé : *Diatribe de figura telluris elliptico-sphæroide,* et imprimé à Strasbourg en 1691, Eisenschmidt affirme que, d'après l'ensemble des mesures connues, les degrés terrestres diminuent quand on s'avance vers le nord, et que, par conséquent, la Terre est allongée, non aplatie dans le sens de son axe. La conséquence semble évidente; elle fut contestée cependant avec une étrange vivacité. Un compatriote de Newton, Keill, dont le nom est mêlé à l'histoire des discussions sur la découverte du Calcul différentiel, écrivait, en 1698, dans un Ouvrage intitulé: *An examination of Doctor Burnet's theory of the Earth* : « Il faut une stupidité et une inattention prodigieuses pour raisonner comme Eisenschmidt ». Cassini, sous une forme moins tranchante, exprimait, en 1701, une opinion conforme à celle de Keill. « En supposant, » dit-il, « comme il est fort vraisemblable, que la diminution de la valeur terrestre d'un degré continue toujours de l'équateur au pôle et en conservant d'ailleurs les hypothèses communes, on voit d'abord qu'un méridien doit être plus petit que l'équateur, et que, par conséquent, la Terre est un globe aplati vers les pôles. »

Cassini, de même que Keill, se trouve, on le voit, d'accord avec Newton, en interprétant mal des observations inexactes; l'erreur de raisonnement est grossière: il n'est pas inutile peut-être d'en indiquer la cause vraisemblable. La longueur du degré, sur la cir-

conférence d'un cercle, augmente avec le rayon du cercle, et, s'il était vrai que les degrés terrestres fussent, près du pôle, plus courts que dans le voisinage de l'équateur, le rayon de courbure du méridien devrait décroitre à partir de l'équateur, et le méridien serait allongé vers le pôle. Si Keill et Cassini ont cru le contraire, c'est qu'ils ont confondu le rayon de courbure du méridien avec le rayon terrestre, distance du point considéré au centre de la Terre. Dans une ellipse par exemple, à l'extrémité du grand axe correspondent le plus petit rayon de courbure et le plus grand rayon vecteur; la confusion entre les deux rayons a causé toute la méprise. L'erreur fut rectifiée, et les adversaires de Newton se crurent en droit de triompher. Les observations cependant laissaient subsister de grandes incertitudes, et l'on pouvait de très-bonne foi soutenir l'une et l'autre thèse : les plus sages restaient dans le doute.

L'Académie des Sciences de Paris, après de longues et confuses discussions, eut l'honneur de trancher la question. La Condamine et Bouguer, envoyés par elle au Pérou en 1735, Clairaut et Maupertuis, chargés de mesurer un degré en Laponie, trouvèrent le degré du nord plus grand que celui de l'équateur; la longueur de 57437 toises trouvée à Torneå, et comparée d'abord au degré mesuré en France et égal seulement à 57060 toises, indiquait un aplatissement égal à $\frac{1}{178}$, supérieur par conséquent à la valeur annoncée par Newton, et presque double de celui que nous adoptons aujourd'hui. Le degré du Pérou fut évalué peu de temps après à 56749 toises, et Bouguer, par la comparaison avec les deux autres, fut conduit à la valeur $\frac{1}{179}$ de l'aplatissement, presque égale à la précédente, et comme elle beaucoup trop grande.

Euler, en 1753, discutant, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, les mesures alors connues, savoir : le degré de France, celui de Laponie, celui du Pérou et enfin celui du Cap de Bonne-Espérance, mesuré par La Caille, les trouvait inconciliables avec la forme d'un ellipsoïde de révolution. En cherchant l'erreur commise sur chacun d'eux et capable d'expliquer cette contradiction, il trouve qu'en augmentant un de ces degrés de 84 toises et diminuant d'autant les deux autres, on mettrait tout d'accord; mais cette erreur de 84 toises ne lui parait pas admissible pour les degrés mesurés par Bouguer et par La Caille. Il s'arrête alors, sans autre motif que la nécessité de rendre les équations compatibles,

à ajouter 15 toises au degré du Pérou, 125 à celui de France, en diminuant celui du Cap et celui de Laponie de 43 toises chacun. L'aplatissement, après ces corrections arbitraires, est $\frac{1}{230}$.

Les premiers travaux de triangulation dans l'Inde avaient donné lieu à des anomalies toutes semblables à celles de la première triangulation française. Les degrés mesurés par le major Lambton, au nord du cap Comorin, semblaient diminuer de longueur à mesure que l'on avançait vers le nord ; un arc de 1 degré à la latitude de 11° 59′ 54″,5 ayant été trouvé égal à 110691 mètres, on trouva, à la latitude de 12° 32′ 9″, 110653 mètres. L'éminent observateur, en continuant ses études, obtint un troisième degré plus court encore et égal à 110625 mètres, semblant indiquer que la presqu'île de l'Inde appartient à un ellipsoïde allongé vers les pôles.

L'action des montagnes ou celle des couches métallifères, situées au-dessous du sol, peut expliquer en partie ces anomalies, qu'il est impossible d'attribuer uniquement à des erreurs persistantes dans des observations d'ailleurs très-concordantes.

Si la surface de la Terre était, conformément à la théorie de Newton, celle d'un ellipsoïde de révolution, la mesure de deux arcs du méridien suffirait pour en déterminer les dimensions. Ils fourniraient, en effet, deux équations entre les deux inconnues qui sont ici les deux axes du sphéroïde. Mais la Terre n'est pas rigoureusement un ellipsoïde ; les montagnes et les vallées qui la couvrent ne peuvent même la laisser représenter, cela est de toute évidence, par aucune forme géométriquement définie. Dans les travaux que nous avons à analyser, ces inégalités locales sont supprimées ; chaque point de la surface est supposé pour cela abaissé ou élevé sur sa propre verticale et ramené au niveau de la mer. La surface déterminée ou du moins cherchée par les géodésistes est celle dont chaque point pourrait communiquer avec la mer par un canal sans courant et par conséquent sans pente. C'est en tenant compte de ces nivellements que les degrés terrestres ont été mesurés, et il n'y aurait sans cela aucun parti à en tirer.

La Géodésie, on le voit, faisant abstraction des montagnes et des vallées, étudie une surface conventionnelle, lisse et polie, qui seule peut, avec quelque chance de succès, être assimilée à une figure géométriquement définie. Les montagnes cependant, quoique supprimées dans les résultats, conservent sur eux une influence très-

notable. Les coordonnées géographiques des points où l'on observe sont, en effet, la base des calculs, et la direction de la verticale en chaque point détermine, comme on sait, la latitude ; or le voisinage d'une haute montagne telle que l'Himalaya, l'existence d'un plateau élevé, tel que celui de l'Asie centrale, exercent une influence très-sensible sur la direction du fil à plomb. La déviation due à l'Himalaya a été évaluée à 28 secondes et, conséquence singulière, mais rigoureusement liée aux définitions, si l'Himalaya était mécaniquement supprimé, enlevé par tombereaux et jeté dans la mer, le sol de la presqu'île de l'Inde restant identiquement ce qu'il est, non-seulement les opérations géodésiques assigneraient une forme différente à cette partie du globe, mais nos définitions mêmes conduiraient à changer la forme de ce terrain où pas un brin d'herbe n'aurait été arraché, pas un édifice renversé. Ce résultat, paradoxal en apparence, cesse de rien présenter d'étrange, si l'on veut bien se rappeler que le globe étudié par les géodésistes est un globe fictif, perpendiculaire en chaque point à la direction de la pesanteur, et fort loin, par conséquent, d'être terminé par la surface réelle du sol.

Dans les travaux sur la forme de la Terre, les astronomes souvent, non contents de supprimer les montagnes et les vallées, s'efforcent de corriger les anomalies qui, dans la direction de la verticale, sont dues, soit à leur attraction, soit à la présence de masses plus denses ou de cavités invisibles, soit enfin quelquefois au voisinage d'une mer profonde dont la densité, inférieure à celle du terrain qui pourrait occuper sa place, altère la direction de la verticale.

L'opportunité de ces corrections est une question très-délicate ; elles sont évidemment une dérogation à la définition très-précise qui a été donnée de la forme théorique du globe.

La surface rigoureusement définie que nous cherchons est, en effet, normale aux verticales, telles qu'elles sont, et non telles qu'elles seraient si l'on apportait tel ou tel changement à la disposition des masses terrestres. Ce que l'on nomme *déviation* de la verticale accuse simplement un changement brusque dans la courbure de la surface ; or, si celle-là est aplatie ou bombée en un point, la détermination de cet accident est un des éléments du problème à résoudre. Le problème nouveau, dans lequel on introduit la condition d'obtenir une surface sans *irrégularités,* ne semble plus susceptible d'une définition précise.

Depuis longtemps en France on a signalé la station d'Evaux (Creuse) comme présentant une de ces anomalies ; la verticale y est inclinée de 7", 6 sur la direction qu'elle devrait avoir pour la régularité des opérations. A Cowhyte, en Angleterre, l'écart est de 10 secondes ; entre Milan et Parme, cette déviation s'élève à 20 secondes, et, dans le voisinage de Turin, d'habiles observateurs ne l'ont pas évaluée à moins de 48 secondes. Près de Moscou, une différence de 18 secondes a été signalée entre la direction prévue et la direction observée aux deux extrémités d'un arc de 16 minutes. Mais il importe d'insister sur ce point : ces anomalies appartiennent précisément à la surface du globe ; si, par exemple, dans le voisinage de Moscou, on établissait artificiellement un lac au lieu même où elles se produisent, la verticale conserverait la même direction et n'en serait pas moins perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles, qui, par définition, représente celle du globe.

Remarquons qu'en poussant jusqu'à ses dernières limites le principe de correction on serait dispensé de tout calcul et de toute observation. On nomme en effet *anomalie* l'écart entre le résultat trouvé et la variation uniforme et régulière à laquelle on s'attend. Mais où la faire commencer? Où finit la continuité qui, en toute rigueur, n'est jamais rompue? Un géomètre assez habile pour apercevoir d'un coup d'œil, dans les résultats de l'observation, l'écart de la forme elliptique, n'aurait-il pas le droit d'y voir une anomalie et de la corriger? Mais n'est-il pas évident qu'en procédant ainsi pour tous les points de la surface, cette forme elliptique, qu'il cherche et qu'il introduit en faisant disparaître tout ce qui s'en écarte, serait le résultat, comme elle a été le principe, de ses calculs, qu'une conclusion nécessaire et prévue rendrait dès lors sans objet.

Les géodésistes, sans aller à cette extrémité, se contentent de rectifier, quelquefois de supprimer les résultats partiels qui accusent une variation brusque et accidentelle dans la courbure, et, tant qu'ils ont pour but, non de discuter la nature de la surface, mais de trouver le meilleur ellipsoïde possible, ils ont raison de procéder ainsi. Cet ellipsoïde, en effet, est une sorte de moyenne, et, dans l'évaluation d'un résultat moyen, il est de règle d'écarter tous les éléments anomaux.

Dans les travaux publiés en Angleterre par l'*Ordinance Survey*, les corrections sont empruntées à d'autres principes, et la détermi-

nation directe de la partie de l'attraction, qui dépend du relief du sol autour de chaque station, sert à faire connaître la correction sans préoccupation de la régularité plus ou moins grande des résultats ainsi obtenus. L'opinion des astronomes paraît consacrer cette méthode nouvelle, malgré les difficultés et les incertitudes qu'elle présente. Dans un Rapport adressé, en 1864, par M. Faye, au Bureau des Longitudes, au nom d'une Commission dont faisaient partie MM. Delaunay et Laugier, les principes de ce nouveau mode de correction sont discutés et complétement approuvés. Le procédé, dit le savant rapporteur, s'applique seulement au relief du sol visible au-dessus de l'horizon de chaque station; il abandonne aux études d'ensemble le soin d'apprécier l'influence des grands écarts géographiques. Les Anglais ont obtenu ainsi, pour un grand nombre de stations, des corrections de 0″,54, 0″,90, 4″,55, 3″,57, 2″,08, 0″,47.

La correction nouvelle n'exclut pas, d'ailleurs, la révision générale des résultats obtenus pour faire disparaître les anomalies, et la valeur plus petite de ces corrections nouvelles est le meilleur argument produit en faveur de l'innovation proposée. Si l'on considère, dit M. Faye, les écarts des latitudes corrigées en neuf stations de la triangulation anglaise, on trouve que la somme des carrés de ces écarts est réduite à 17 secondes, tandis qu'elle irait à 43 secondes, si l'on négligeait la correction des actions locales. Ces corrections toutefois laissent, dans certains cas, subsister des résultats assez fortement anomaux pour que, dans l'intérêt de l'harmonie de l'ensemble, on juge nécessaire de les supprimer. C'est ainsi que la station de Cowhyte a été exclue des calculs, sans que le relief du sol qui l'entoure ait pu expliquer l'anomalie considérable qui s'y produit.

Depuis les célèbres expéditions de La Condamine et de Clairaut, les opérations destinées à fournir plus exactement la forme du globe ont été incessantes chez les peuples civilisés. En Italie, les PP. Maire et Boscovich, dans les États Romains, le P. Beccaria, dans les plaines de Turin, exécutèrent, en 1751 et en 1768, deux triangulations réputées excellentes; en Amérique, Mason et Dixon mesurèrent, en 1764, un arc de 1° 28′ 45″ dans l'État de Pensylvanie, et Reuben Barrow enfin, dans l'Inde, en 1790, mesura un arc méridien de 1° 8′; mais la France, qui, en 1735, avait donné

l'impulsion, devait, à la fin du XVIIIe siècle, produire un nouveau travail, dont la perfection ne semble avoir été surpassée que par les plus récents progrès de l'art d'observer. Delambre et Méchain, aidés de Laplace et de Borda, mesurèrent, de 1792 à 1799, le grand arc compris entre Dunkerque et Barcelone, qui, continué par Biot et Arago jusqu'aux îles Baléares, est aujourd'hui encore l'un des éléments importants et classiques dans les recherches qui nous occupent.

La première triangulation fut exécutée en Angleterre par le général Roy, en 1783.

En 1801, Svanberg reprenait en Suède la mesure de l'arc choisi par Maupertuis.

Le major Lambton, dans l'Inde, commençait, en 1802, la mesure de l'arc auquel il a travaillé jusqu'en 1822, et qui, au moment de sa mort, continué sous sa direction par le capitaine Everest, comptait déjà plus de 13 degrés; continué, depuis cette époque, par les soins de la Compagnie des Indes d'abord, et du Gouvernement anglais à partir de 1818, il mesure aujourd'hui une amplitude totale de 22 degrés.

La Prusse, en 1802, avait commencé, sous la direction du baron de Zach, directeur de l'Observatoire de Seeberg, la mesure d'un arc de méridien; les travaux furent continués jusqu'en 1806. Malheureusement, dit M. Baeyer, le grand-duc de Weimar avait fait présent à de Zach de deux canons hors de service pour marquer les extrémités de la base. A la nouvelle de la bataille d'Iéna, Gotha qui, jusque-là, avait obtenu des puissances belligérantes le privilége de la neutralité, craignit que les deux canons, enfoncés verticalement et maçonnés dans la terre, ne fussent considérés par le vainqueur comme un matériel de guerre; on les fit précipitamment enlever : le lieu exact de leur position a disparu, et le travail de de Zach est aujourd'hui sans utilité.

Nous rapportons, sans y rien changer, cette étrange anecdote, qui, racontée par M. J.-J. Baeyer, acquiert cependant un caractère complétement officiel.

L'illustre Gauss acceptait, en 1821, la direction de triangulation du Hanovre, qui fut, pour lui, l'occasion de ses admirables travaux sur la théorie des surfaces courbes et de l'invention de l'appareil nommé *héliotrope,* le meilleur et le plus simple des signaux géodé-

siques. Son ami Schumacher continuait les travaux dans le royaume de Danemark et dans le Holstein.

Soldner et Schwerd en Bavière, Littrow et Carlini en Autriche, l'illustre Bessel dans la Prusse orientale, Plana en Sardaigne, Hansteen en Suède, et le général Nerenbayer en Belgique, poursuivirent presque sans relâche, de 1820 à 1850, la grande œuvre de la triangulation européenne.

La Russie, qui, après un essai resté sans résultat en 1737, avait négligé les travaux géodésiques, les reprenait en 1817 pour ne plus les interrompre. L'arc russe, aujourd'hui, compte 25°20′ d'amplitude, et treize stations, astronomiquement déterminées avec la plus grande précision. Il n'en existe pas d'aussi considérable à la surface du globe.

Tous ces travaux, très-dignes de confiance, préparaient de grandes difficultés aux théoriciens. Regardant, en effet, la Terre comme un ellipsoïde, il suffisait de 2 degrés mesurés à des latitudes différentes pour en déterminer les dimensions, et l'abondance des données permettait de varier à l'infini les calculs en conduisant à des résultats très-différents. Le colonel Everest, par exemple, à l'occasion de la mesure du grand arc indien, dont la longueur totale est de 22 degrés, a réuni les résultats partiels les plus dignes de confiance, et, les associant deux à deux de manière à former quarante-deux groupes, a trouvé des aplatissements qui varient entre $\frac{1}{192}$ et $\frac{1}{390}$. Schubert, en combinant l'arc prussien avec une partie de l'arc russe, a trouvé un aplatissement égal à $\frac{1}{1450}$, tandis que l'arc anglais, combiné avec le même arc russe, donne $\frac{1}{116}$.

Les astronomes qui, depuis les travaux de Delambre, ont recommencé à plusieurs reprises le travail d'ensemble, sont parvenus cependant à des conclusions presque identiques. Loin de chercher dans des combinaisons isolées des résultats anomaux, ils s'attachent, au contraire, à fondre dans une moyenne tous les résultats connus, en écartant même, au besoin, comme accidentellement inexacts, ceux qui s'écartent notablement du résultat probable.

Delambre avait trouvé en 1800 :

Pour le rayon polaire............. 6355564^{m}
Pour celui de l'équateur.......... 6371653

La différence était 19083 mètres et l'aplatissement $\frac{1}{331}$.

Ces chiffres étaient déduits de l'arc français et de l'arc du Pérou. Les travaux exécutés en Espagne par Biot et Arago avaient réduit l'aplatissement à $\frac{1}{308}$; l'astronome suédois Walbeck, en tenant compte des mesures de France, du Pérou et de Laponie, et y adjoignant l'arc mesuré dans l'Inde à cette époque, proposait une correction nouvelle en élevant l'aplatissement à $\frac{1}{302}$; il ajoutait 1243 mètres au rayon polaire et en retranchait, au contraire, 731 à celui de l'équateur.

M. Airy, neuf ans après, en 1830, trouvait :

Pour le rayon polaire............ 6356184^{m}
Pour le rayon de l'équateur....... 6377490

ajoutant ainsi 594 mètres au rayon polaire de Walbeck et 351 à celui de l'équateur; l'aplatissement était réduit à $\frac{1}{299}$.

Bessel, enfin, en 1837, s'attachant, comme Airy, à représenter le mieux possible toutes les mesures dignes de confiance, obtenait pour aplatissement $\frac{1}{300,70}$; mais Puissant ayant signalé, quelques années plus tard, en 1840, une erreur de calcul dans la triangulation française, et ajouté par là 67 toises à la distance de Montjoui à Mola, Bessel reprit les calculs, et obtint, pour les deux axes de la Terre, les valeurs suivantes :

Rayon polaire.................. 6356078,96
Rayon de l'équateur........... 6377397,16

Il retranchait ainsi 93 mètres seulement au rayon polaire proposé par Airy et 105 à celui de l'équateur.

De telles corrections, quand il s'agit de résultats approchés, sont absolument sans importance, et Encke a pu écrire avec grande vraisemblance qu'aucun changement notable ne sera désormais apporté à ces chiffres; aucun ellipsoïde de révolution ne sera préférable à ceux de Bessel et d'Airy.

Examinons, pour apprécier l'importance des différences proposées, à quelle erreur dans les mesures primitives peut correspondre un accroissement de 1000 mètres pour l'un des axes de la Terre. Supposons, par exemple, que, l'équateur restant le même, on accroisse de 1000 mètres le rayon polaire, et admettons que des observateurs, opérant avec une exactitude parfaite, exécutent sur les

deux surfaces les observations géodésiques et astronomiques qui doivent en déterminer les dimensions; il faudra, sur chacune d'elles, mesurer un arc d'un degré, et cette mesure, d'après nos hypothèses, faite avec une exactitude absolue, accusera dans les latitudes moyennes une différence de 25 mètres environ entre les longueurs qui correspondent aux deux surfaces. 25 mètres sur 25 lieues, telle est l'erreur qui, commise sur l'un des sphéroïdes, aura pour résultat de le faire confondre avec l'autre! En supposant les bases exactement mesurées, l'erreur pourrait résulter d'une seconde en plus ou en moins attribuée à la latitude de l'une des extrémités de l'arc.

Il est bien difficile, même aujourd'hui, de compter sur une telle exactitude.

La précision des mesures astronomiques a toujours été en augmentant.

Ptolémée divisait le degré en six parties seulement, et l'incertitude commençait pour lui avec les angles inférieurs à dix minutes.

Tycho, le plus exact et le plus habile des astronomes de son temps, osait répondre d'une demi-minute, c'est-à-dire de 30 secondes.

Cassini, cent ans après lui, donnait les résultats de ses observations à une minute près seulement.

Picard, en appliquant, en 1669, les lunettes aux observations d'angles, augmenta singulièrement l'exactitude des mesures et leur précision : la latitude de l'Observatoire de Paris a été trouvée par lui de 48°50′10″; Lalande, en 1770, adoptait 48°50′12″; Bouvard, en 1815, 48°50′16″; on s'est arrêté, d'après les mesures de Laugier, à 48°50′11″,8.

Flamsteed, en 1690, attribuait à l'Observatoire de Greenwich une latitude de 52°28′30″; on la trouve aujourd'hui de 52°28′40″.

Arago enfin, en 1808, après avoir pris les plus minutieuses précautions, trouvait pour latitude de Formentera 38°59′56″,02, et Biot, cependant, en 1827, corrigeant par 1060 observations nouvelles le résultat des 4000 observations d'Arago, trouvait 38°59′53″,17, constatant ainsi une erreur de 3 secondes.

Il serait téméraire, on le voit, de considérer comme certaines les valeurs obtenues dans lesquelles figurent des secondes et des fractions de seconde.

Les résultats acceptés par les astronomes sont choisis, d'ailleurs, non de manière à satisfaire rigoureusement aux observations, mais à amoindrir le plus possible la somme des carrés des erreurs. La discussion des observations du pendule à diverses latitudes confirme d'une manière remarquable le chiffre trouvé par les mesures géodésiques pour l'aplatissement de la Terre. La longueur du pendule qui bat la seconde dépend, en chaque point, de l'intensité de la pesanteur, et, par conséquent, de la répartition des masses à la surface et dans l'intérieur du globe. Clairaut, en supposant la Terre formée de couches elliptiques homogènes, a découvert une relation très-simple entre l'aplatissement et les intensités de la pesanteur à l'équateur et au pôle, et a montré qu'entre ces points extrêmes l'intensité doit varier proportionnellement au carré du sinus de la latitude. Le général Sabine, dans un Ouvrage publié en 1825, a vérifié l'accord de cette loi avec de nombreuses observations. Un pendule battant la seconde à Greenwich, et faisant par conséquent 86400 oscillations en vingt-quatre heures, doit, d'après le théorème de Clairaut, et en supposant l'aplatissement égal à $\frac{1}{288}$, en faire 86263 à l'équateur : l'observation donne 86269. Voici quelques-uns des résultats recueillis par le général Sabine :

	Nombre	
	calculé.	observé.
Jamaïque.......	86284,8	86285,12
New-York......	86358,66	86357,73
Altona.........	86417,02	86417,89
Drontheim......	86442,24	86438,77
Spitzberg.......	86479,90	86483,01

L'accord est certainement des plus satisfaisants et semble, au premier abord, un argument bien considérable en faveur de l'hypothèse de Clairaut et de la forme ellipsoïdale. Un examen plus attentif cependant peut, en partie au moins, ébranler cette confiance, et la petitesse des différences observées, réunie à l'accord des diverses évaluations de l'aplatissement, ne prouve nullement que les méridiens aient réellement la forme elliptique. La méthode des moindres carrés, appliquée en effet à l'ensemble des mesures, ne peut donner qu'une sorte de moyenne, qui doit varier d'autant

moins que le nombre des observations augmente davantage et qu'elles sont réparties d'une manière plus variée sur les diverses régions du globe. L'accord des observations du pendule avec la théorie n'est pas plus décisive en faveur de l'hypothèse sur laquelle celle-ci est fondée, et qui consiste à admettre pour la Terre la forme d'un ellipsoïde de révolution formé de couches homogènes ellipsoïdales. La forme des couches, que Clairaut, dans ses démonstrations, suppose elliptiques, est sans influence aucune sur le résultat, et le théorème reste exact, quelle que soit la distribution intérieure, pourvu que la surface, telle que nous l'avons définie, reste la même. La démonstration est facile aujourd'hui, grâce au progrès de la théorie du potentiel, et l'on peut s'étonner que de très-habiles géomètres l'aient rattachée à de longs calculs. La surface de la Terre, telle que nous l'avons définie, coupe en chaque point, à angle droit, la direction du fil à plomb. Il en résulte que le potentiel, relatif à la pesanteur, dans lequel nous comprenons le terme dû à la force centrifuge, est constant à la surface de l'ellipsoïde. Or cette seule condition suffit pour le déterminer pour tous les points extérieurs. Si deux distributions différentes de matière donnent lieu à une même surface de niveau ellipsoïdale, les potentiels, à l'intérieur, pourront être très-différents; ils seront identiques, à l'extérieur, et la pesanteur suivra les mêmes lois, identiquement dans les deux cas, soit à la surface, soit pour les points extérieurs. L'étude des oscillations du pendule ne peut donc rien apprendre sur la variation de la densité à l'intérieur du globe.

La forme de la surface extérieure détermine seule la loi de la pesanteur; en la trouvant en accord presque parfait avec celle qui convient à une surface ellipsoïdale, on est conduit à adopter comme certaine la figure ellipsoïdale proposée par Delambre, Bessel et Airy, dont l'aplatissement diffère peu de $\frac{1}{300}$; mais les écarts qui subsistent, quoique très-petits, sont supérieurs aux erreurs possibles d'observation, et les attractions locales dues à des variations de densité dans le voisinage de la surface contribuent, pour une part inconnue, avec les irrégularités de la forme générale de celle-ci, aux anomalies observées.

Les résultats et les discussions qui précèdent établissent suffisamment que la forme exacte de la Terre n'est pas celle d'un ellipsoïde de révolution, et qu'en cherchant à la représenter par une

telle surface il n'est pas possible d'espérer une approximation plus grande que celle qui résulte des travaux de Bessel et d'Airy.

Les limites entre lesquelles ont varié jusqu'ici les évaluations proposées ne peuvent guère faire supposer qu'un changement de quelque importance puisse résulter des recherches ultérieures. M. Listing, en rapportant les éléments successivement proposés, y a joint le tableau des erreurs qui en résulteraient pour le mètre étalon, si on le considère, conformément à la définition primitive, comme la dix-millionième partie du quart du méridien.

	Différence entre le mètre étalon et la dix-millionième partie du quart du méridien.
	mm
1800 Delambre	0,0000
1810 Delambre	0,0268
1819 Walbeck	0,0268
1830 Schmidt	0,0661
1830 Airy	0,0976
1841 Bessel	0,0856
1856 Clarke	0,1620
1861 Clarke	0,1984
1863 Clarke	0,1902
1863 Prult	0,1924
1867 Fischer	0,1714

Le mètre étalon est trop petit; cela semble résulter avec évidence du tableau précédent, et la correction qu'il faudrait lui faire subir paraît comprise entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{2}{10}$ de millimètre. Il est bien entendu, d'ailleurs, que l'on ne pourrait pas, sans les plus graves inconvénients, effectuer cette correction, qui devrait alors être indéfiniment renouvelée à chaque nouveau progrès des opérations géodésiques.

L'ellipsoïde de révolution ne pouvant donner qu'une approximation, on a cherché si d'autres surfaces pourraient représenter avec plus d'exactitude la totalité des observations. Les officiers anglais attachés, sous la direction du colonel James, aux travaux de l'*Ordinance Survey*, ont cherché à représenter les observations par une surface de révolution d'une nature fort compliquée, et définie par une relation entre le rayon de courbure de la méridienne et la lati-

tude du point correspondant. En déterminant le mieux possible les coefficients restés indéterminés dans la formule, on est arrivé à représenter toutes les observations (sauf un petit nombre correspondant à des stations anomales) avec une erreur moyenne de 2″,064, l'erreur correspondant à la forme elliptique ayant pour valeur moyenne 2″,098. On voit que le changement proposé complique les résultats sans en accroître notablement l'exactitude.

Des travaux plus nombreux ont été entrepris pour substituer à l'ellipsoïde de révolution un ellipsoïde à trois axes inégaux. Cette surface, Jacobi l'a montré, est une des formes possibles d'équilibre pour un fluide homogène tournant uniformément autour d'un axe; mais, comme les densités terrestres sont fort inégales et qu'à aucune époque, sans doute, il n'en a été autrement, cette élégante remarque n'a pu exercer aucune influence sur le choix de la surface préférée sans doute à toutes les autres à cause de sa simplicité. En l'adoptant, toutefois, on accroît la complication du problème, et le nombre des inconnues se trouve doublé. Quoiqu'un ellipsoïde, en effet, soit déterminé par ses trois axes, il faut encore, pour définir celui qui doit représenter la Terre, trouver sur quels méridiens sont placés les sommets de l'ellipse qui remplace l'équateur. En même temps que le nombre des équations, s'accroît la complication de chacune d'elles; bornons-nous à remarquer que, dans cette hypothèse nouvelle, les méridiens ne sont plus des lignes planes. La méridienne, en effet, à la surface de la Terre, est une courbe dont la tangente en chaque point est la projection de l'axe du monde sur le plan horizontal; elle est donc l'intersection de la surface du globe par un cylindre assujetti à lui être normal en chaque point, et dont les génératrices sont parallèles à la ligne des pôles, c'est-à-dire à l'un des axes de l'ellipsoïde. La base d'un tel cylindre sur le plan de l'équateur est une courbe parabolique dont l'équation est de la forme

$$y = Cx^m.$$

La constante m, qui se réduit à l'unité dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, en diffère fort peu dans le cas qui nous occupe. Les méridiens, on le voit par cette équation, se réunissent tous au pôle; mais, circonstance singulière, au lieu de s'y couper sous des angles proportionnels aux arcs qui séparent leurs traces sur l'équa-

teur, ils y sont tous tangents à la même section principale, à l'exception, toutefois, de l'un d'entre eux qui coïncide avec l'autre section. Leur courbure est, d'ailleurs, infinie en ce point, et ils se séparent rapidement pour suivre de très-près les intersections de la surface avec les plans passant par l'axe.

M. Schubert, en appliquant la méthode des moindres carrés, a cherché à accorder l'hypothèse d'un ellipsoïde à trois axes inégaux avec l'ensemble des observations connues. Huit arcs ont servi de base à ses calculs, et il a trouvé pour axes :

$$\begin{gathered} 6378555^{\mathrm{m}}, \\ 6377837, \\ 6356719, \end{gathered}$$

le plus petit étant, bien entendu, dirigé vers le pôle. Le plus grand des deux axes équatoriaux correspond au méridien qui passe par Arkhangel et par la mer Rouge; le plus petit, au méridien qui traverse la mer du Japon et coupe la Nouvelle-Hollande par le milieu. La différence de 718 mètres entre les deux axes est tellement petite, qu'il est difficile d'y attacher une importance sérieuse.

Le capitaine Clarke, en 1860, reprenant les calculs avec des données plus nombreuses, trouvait pour les trois axes :

$$\begin{gathered} 6378375^{\mathrm{m}}, \\ 6376916, \\ 6356171, \end{gathered}$$

le méridien qui passe par le grand axe de l'équateur étant, suivant lui, celui de Copenhague. Six ans plus tard, enfin, par une discussion nouvelle avec exclusion de certaines stations anomales, le colonel Clarke trouvait entre les deux axes de l'équateur une différence de 1946 mètres, dix fois moindre environ que l'excès de chacun d'eux sur l'axe polaire. Une si petite inégalité est tellement près de se confondre avec les erreurs possibles d'observation, que les astronomes n'y ont accordé aucune confiance, et les savants auteurs des travaux qui y ont conduit ont eux-mêmes renoncé à les introduire dans leurs recherches ultérieures.

Nous pouvons, dès à présent, regarder comme certain que la Terre, étudiée avec l'exactitude minutieuse que comportent les in-

struments et les méthodes actuelles, ne peut être rigoureusement assimilée ni à un ellipsoïde de révolution ni à un ellipsoïde à trois axes inégaux, et il faut renoncer, pour les études ultérieures, à ce système de moyennes qui atténue et masque les écarts de la loi régulière : ce sont eux qu'il faut aujourd'hui signaler et mettre en relief.

La surface de la Terre est-elle de révolution? C'est par l'étude des parallèles bien plus encore que par celle des méridiens qu'on doit résoudre une telle question. Si la surface, telle que nous l'avons définie, est de révolution, à des différences égales de longitude correspondent, sur un même parallèle, des longueurs égales, et la pesanteur doit, en tous les points de ce parallèle, conserver une valeur constante.

La première mesure d'un arc de parallèle a été entreprise, en 1734, sur le parallèle de Paris, par Cassini et Maraldi.

En 1740, Cassini, de Thury et La Caille mesuraient un arc de près de 2 degrés entre Saint-Clair, près de Cette, et le mont Sainte-Victoire, dans le voisinage d'Aix.

Les résultats de ces premiers essais présentent de telles irrégularités, qu'on a dû les écarter dans les études ultérieures.

La première mesure digne de confiance, dans le sens des parallèles, est celle d'un arc du 45e parallèle, qui, traversant la France à partir de l'embouchure de la Gironde, passe près de Turin et de Milan pour se terminer à Fiume.

L'un des résultats saillants de ce grand travail est la constatation d'une différence de 49″,55 entre l'azimut calculé et l'azimut observé du signal placé sur le mont Cenis, indiquant dans ces régions une déviation considérable de la verticale et une grande inégalité dans la figure de la Terre. Entre Turin et Milan se produit une autre anomalie, et la différence des longitudes surpasse de 30 secondes celle qui correspondrait à une figure régulière du globe. En partageant l'arc compris entre Marennes et Padoue en six parties, correspondant à des différences égales de longitude, leurs longueurs, au lieu d'être égales, comme il le faudrait, sur une surface de révolution, varient entre 77792 mètres qui est le plus petit, et 77985 mètres.

Un second arc de parallèle a été mesuré entre Brest, Paris et Strasbourg; mais les déterminations astronomiques, au jugement de Puissant, méritent peu de confiance; elles ont été reprises, il y

a une dizaine d'années et étendues vers Munich et vers Vienne, en employant, pour la détermination des différences de longitude, la méthode plus précise et plus sûre des signaux télégraphiques.

En Angleterre, l'arc compris entre Greenwich et la station de Valentia en Irlande a été mesuré par M. Airy.

Mais le plus considérable des travaux entrepris dans cette voie est, jusqu'ici, la mesure du parallèle russe exécutée sous la direction de M. Struve, et qui a donné lieu au premier projet d'une union des Gouvernements européens pour l'accomplissement d'un travail d'ensemble. Une chaîne non interrompue de triangles, disait à l'Académie le maréchal Vaillant, le jour où M. Struve présentait son grand travail, existe aujourd'hui depuis le bord de l'océan Atlantique jusqu'au rivage de la mer Caspienne, de Brest jusqu'à Astrakhan, traversant la France, la Belgique, la Prusse et la Russie. Il importe qu'on utilise cette chaîne pour le calcul d'un arc de parallèle qui n'embrassera pas moins de 55 degrés en longitude.

Telle était, en effet, l'entreprise pour laquelle M. Struve avait mission de réclamer le concours du Gouvernement français.

Ces grands travaux sont aujourd'hui en voie d'exécution, et une association permanente des astronomes européens qui, au moment où nous écrivons ces lignes, tient à Dresde sa douzième réunion, s'assemble chaque année pour discuter les méthodes et l'ordre des opérations à entreprendre, en confiant à une Commission permanente le soin de centraliser les résultats pour préparer le travail d'ensemble.

La publication, très-importante pour l'avenir de la Science, régulièrement faite par la Commission centrale, a pour titre : *General-Bericht über die mittel-europäische Gradmessung*. Les fascicules se succèdent sans interruption depuis 1863; celui de 1873, qui est le onzième, a été récemment publié.

De tels documents sont peu susceptibles d'analyse : nous nous bornerons à en indiquer le cadre uniformément adopté.

Les Rapports adressés par les représentants de chaque nation sont reproduits dans leurs traits principaux et réunis par ordre alphabétique. Dans chaque fascicule se trouvent les résumés envoyés par le duché de Bade, la Bavière, la Belgique, le Danemark, la France, le Hanovre, la Hesse-Cassel, la Hesse-Darmstadt, l'Italie, le Mecklembourg, les Pays-Bas, la Prusse, l'Autriche, la Pologne,

la Russie, la Suède et la Norvége, la Suisse, le Wurtemberg, et depuis 1866 enfin, l'Espagne et le Portugal.

La négligence ou les empêchements d'un ou de plusieurs correspondants ne retardent jamais la publication : leur travail est renvoyé à l'année suivante.

La France, représentée pour la première fois cette année dans les réunions annuelles, n'est pas restée en dehors de l'œuvre commune. On lit dans le Rapport de 1863 :

« *France.* — Le Gouvernement français, reconnaissant l'importance scientifique de la mesure des degrés européens (*mittel-europäische Gradmessung*), a ordonné une opération grandiose qui doit s'étendre sur la France entière. La direction en est confiée à l'illustre auteur de la découverte de Neptune, directeur de l'Observatoire de Paris. La triangulation française est terminée, et M. Le Verrier se propose de déterminer de nouveau très-exactement les différences de longitude par l'emploi du télégraphe électrique, en s'occupant particulièrement des stations capitales (*Haupt-Stationen*) de Marennes, Clermont-Ferrand et le mont Cenis, situées sur le parallèle moyen. »

Dans les Rapports de 1864 et de 1865, la Commission se plaint de n'avoir reçu aucune Communication de la France et regrette particulièrement l'interruption des travaux commencés pour la détermination des différences de longitude entre Paris, Vienne et Dresde. En 1866, faute de documents directement envoyés au comité, la Commission centrale a reproduit, par extrait, un compte rendu publié par M. Villarceau sur l'histoire des travaux géodésiques en France. C'est par l'envoi de ces publications que le Bureau central est également informé, en 1868, des travaux accomplis en France.

Le colonel Ibañez, membre de l'Académie des Sciences de Madrid et délégué de l'Espagne, a communiqué, le 9 avril 1866, un Mémoire écrit en français, et l'on peut voir que la science, au delà des Pyrénées, est loin d'être aussi délaissée qu'on s'est plu trop souvent à le répéter :

« Le grand canevas, dont les sommets sont actuellement marqués sur le terrain, se compose », dit M. Ibañez, « de neuf chaînes de triangles dont quatre prennent la direction des méridiens de Salamanque, de Madrid, de Pampelune et de Lérida; trois autres

s'étendent dans le sens des parallèles de Palencia, de Madrid et de Badajoz; enfin les deux dernières suivent le littoral. Sur l'une de celles-ci s'appuient les triangles qui doivent relier les îles Baléares au continent. Cette triangulation se rattache à celle du Portugal et aux triangles français des Pyrénées et de la méridienne de Dunkerque; mais, un grand nombre de points de cette méridienne sur le territoire espagnol ayant malheureusement disparu, on est obligé de reprendre ce travail depuis la frontière jusqu'à l'île de Formentera, et l'on est dans l'intention d'y apporter les soins les plus minutieux; le nombre des sommets est de près de deux cent quatre-vingts; les observations définitives sont déjà faites à cent soixante stations, sans compter soixante-dix autres stations choisies dans l'intérieur des quadrilatères formés par les chaînes principales et dans l'île de Mayorque. L'Observatoire de Madrid a déterminé les longitudes et les latitudes de dix-sept capitales de province dont la position est également rattachée aux sommets des grands triangles, ainsi que l'azimut d'un des côtés. »

Un nouveau Rapport adressé en 1869 montre le progrès de l'opération et la persévérance de l'Espagne dans son concours à l'œuvre commune. Les résultats des calculs y sont comparés à la mesure directe de cinq côtés, et la petitesse des différences montre à la fois l'habileté des observateurs et la perfection des instruments. Les plus importants d'entre eux, et notamment l'appareil à mesurer les bases, sont construits à Paris par Brunner; les théodolites, construits par Ertel, donnent la seconde exacte. Les observations, au moment où ce Rapport était adressé (1869), étaient terminées en deux cent-deux stations.

Un nouveau Rapport des délégués espagnols rend compte des travaux exécutés en 1870, 1871 et 1872. Dans le courant de l'année 1871, on avait terminé les observations pour vingt-cinq stations de premier ordre, mais les observateurs étaient encore sur le terrain, et l'on pouvait compter, avant la fin de la campagne, sur une dizaine de stations nouvelles. Le Rapport de 1871 apprend, en effet, que le nombre des stations terminées en 1871 s'élève à trente-sept; treize nouvelles l'ont été en 1872. Les calculs ont été terminés pour soixante-seize stations; une double ligne de nivellements de précision a été établie entre Alicante et Madrid, sur une longueur de 529 kilomètres; elle comprend trente repères perma-

nents en bronze et quatre cent cinquante secondaires, y compris les petits embranchements qui la relient à plusieurs sommets géodésiques.

La somme employée pour les travaux géodésiques en Espagne a été de 150 000 francs, et un crédit de 230 000 francs a été accordé par l'Assemblée nationale pour les travaux de l'année 1873.

Le Rapport de 1873 n'est malheureusement pas parvenu au Congrès, et l'on n'en comprend que trop les causes probables.

L'Italie, de même que l'Espagne et plus activement encore, apporte chaque année un contingent abondant de documents précis exactement discutés et calculés.

La science italienne, en 1863, venait de perdre deux de ses représentants les plus illustres, Carlini et Plana, et le premier Rapport de l'Association rappelle en quelques lignes les services rendus par ces deux vétérans de la Géodésie.

Dès l'année suivante, en 1864, le colonel Ricci adressait à la Conférence internationale un Rapport détaillé sur les travaux de Géodésie exécutés en Italie, et l'éminent directeur de l'Observatoire de Milan, M. Schiaparelli, trace le programme de ceux qui devront servir à la mesure de trois arcs de méridien et de trois arcs de parallèle. Chaque Rapport, depuis cette époque, contient le compte rendu des travaux accomplis dans l'année précédente; celui de 1871 donne le réseau complet des triangles qui couvrent la Sicile et les provinces méridionales de la Péninsule avec jonction à l'île de Lissa, par laquelle le réseau se joindra aisément à celui de la Dalmatie.

On voit, par le Rapport de 1873, que l'activité des savant italiens ne s'est nullement ralentie, et leurs travaux devront, dans le cours de 1874, se relier, par la mesure d'une base commune près d'Udine, à celui des États autrichiens.

Il serait superflu d'indiquer successivement la part de chaque nation dans l'œuvre commune; toutes semblent tenir à honneur d'y apporter leur contingent, et la France, nous le savons, sans avoir, jusqu'ici, envoyé de Rapports, accumule des matériaux dont le nombre, aussi bien que l'exactitude, ne laisseront subsister aucun reproche.

L'Europe entière, d'ici à peu d'années, sera donc recouverte par un réseau continu de triangles dont les mesures géodésiques, reliant

les sommets, font connaître directement tous les angles. La mesure directe d'un grand nombre de bases permet de calculer, en se réservant de nombreuses vérifications, les coordonnées géographiques de chaque station, en contrôlant, par des mesures directes, celles que fournit le calcul, quand on suppose à la Terre la forme d'un ellipsoïde de révolution.

Ces calculs sont fort compliqués, et la Géodésie, poussée à ce degré de rigueur et de précision, exige l'intervention de la science la plus élevée.

Lorsqu'on veut étudier un terrain de quelques hectares, les formules employées sont celles de la Trigonométrie rectiligne ; la courbure de la Terre étant négligeable, les problèmes à résoudre sont élémentaires et comparativement très-faciles. Dans les triangulations qui s'étendent à l'ensemble d'une contrée, la courbure de la Terre transforme les triangles rectilignes en triangles sphériques, mais les formules sont simplifiées par cette circonstance que les côtés sont tous de petites fractions de la circonférence. Quoique les rayons visuels qui réunissent les sommets soient rectilignes, il faut bien remarquer que le triangle sphérique est réellement celui que l'on considère et qu'il faut calculer. Et d'abord, la mesure de la base, par laquelle doit commencer toute opération géodésique, donne évidemment la ligne la plus courte entre les deux stations choisies, c'est-à-dire un grand cercle, si l'on veut considérer la Terre comme sphérique. Lorsqu'on vient ensuite à mesurer les angles, supposons trois stations A, B, C ; lorsqu'on se place en A pour viser B et C successivement, l'angle que l'on mesure n'est pas celui des deux lignes droites AB et AC, mais celui des deux plans verticaux passant par ces deux lignes et par la verticale en A : c'est ce qu'on nomme l'*angle réduit à l'horizon ;* or ces deux plans sont ceux des grands cercles AB, AC, et leur angle est celui du triangle sphérique BAC.

Lorsque, poussant plus loin l'approximation, on veut introduire l'hypothèse d'une surface ellipsoïdale, les triangles considérés à la surface du globe peuvent être considérés, sans erreur appréciable, comme formés par les lignes géodésiques, c'est-à-dire par les lignes de longueur minimum réunissant leurs sommets. Les lignes ne sont pas planes et ne se confondent pas, par conséquent, avec les intersections de la surface par un plan vertical. L'angle du triangle dif-

fère donc, si l'on veut parler en toute rigueur, de l'angle réduit à l'horizon fourni par le théodolite; mais la différence est trop petite pour que, malgré l'extrême précision des observations, il soit utile d'en tenir compte. Considérons en effet à la surface de la Terre un triangle ABC formé par trois lignes *géodésiques*, c'est-à-dire par les lignes les plus courtes qui, sur la surface de l'ellipsoïde, puissent réunir les points ABC. Les côtés de ce triangle ont en chaque point, d'après un théorème bien connu, leur plan osculateur normal à la surface de la Terre et par conséquent vertical. Les deux plans dont l'inclinaison mesure rigoureusement l'angle en A sont donc les plans osculateurs des lignes AB, AC, en leur point d'intersection A; or, à l'un de ces plans, nous substituons le plan vertical qui passe par la ligne AB et qui en diffère nécessairement, car le plan osculateur en A, tangent à la courbe AB, s'en éloigne à partir du point de contact A et ne peut la couper en un second point B; mais, d'après un théorème connu, la distance de ce point B au plan osculateur en A est du *troisième ordre*, c'est-à-dire proportionnelle au cube de l'arc AB; si l'on désigne cet arc par σ, par ρ son rayon de courbure, et par r le rayon de torsion ou de seconde courbure, évidemment très-grand dans le cas actuel, l'angle est mesuré par $\frac{\sigma^2}{6r\rho}$.

ρ diffère peu du rayon de la Terre, le calcul de r serait long et difficile; mais nous pouvons aisément trouver son ordre de grandeur; la courbure $\frac{1}{r}$ est nulle, en effet, quand l'ellipsoïde devient une sphère, puisque les lignes géodésiques sont planes; son expression générale doit donc contenir l'aplatissement en facteur, et l'on peut représenter r par $300\,\alpha\rho$, α désignant un nombre inconnu dont nous n'avons aucune raison pour supposer la valeur très-petite. Or, en prenant pour σ vingt-cinq lieues, on trouve que $\frac{\sigma^2}{6.300\rho^2}$ représente environ trois centièmes de seconde : tel est l'ordre de l'erreur commise.

Les promoteurs de la grande triangulation européenne n'ont pas manqué d'étudier cette cause d'erreur. Désireux de pousser l'exactitude jusqu'aux dernières limites, ils ont laborieusement cherché l'expression de ces petites corrections. Gauss, le premier, dans ses

recherches de haute Géodésie, avait calculé les coordonnées de l'extrémité d'un arc géodésique dont la direction est connue ainsi que le point de départ, et Jacobi, dans trois articles des *Astronomische Nachrichten,* avait élégamment appliqué à ce problème la théorie des fonctions elliptiques. Hansen et M. Baeyer, dans ces derniers temps, ont repris la question au point de vue surtout des applications pratiques à la surface de la Terre, et leurs solutions, quoique fort différentes, ont donné lieu à de vives discussions de priorité, sur lesquelles nous n'avons pas à insister.

Quel sera, dans l'avenir, le résultat de tant d'efforts? D'excellentes observations, systématiquement ordonnées et choisies de manière à se contrôler les unes les autres, seront pour les géomètres un moyen assuré de juger avec certitude toute théorie proposée sur la figure du globe : mais le temps est loin encore, cela semble bien probable, où la loi des anomalies et des irrégularités nous sera révélée. Si la surface n'est soumise, en toute rigueur, à aucune loi géométrique, il resterait, après avoir déterminé la forme approchée, à assigner, pour chaque point, la distance à l'ellipsoïde moyen qui représente le mieux l'ensemble des observations. On doit aussi, en chaque point de la surface, rechercher la direction des lignes de plus grande et de moindre courbure et la grandeur des deux rayons. Les mesures géodésiques pourront conduire un jour à de telles déterminations; mais, si nombreuses et si exactes qu'elles soient, elles laisseront aux géomètres un problème des plus difficiles, qui certainement aujourd'hui dépasse de bien loin les ressources de la Science, et nous pouvons, après soixante ans de travaux incessants et dignes des plus grands éloges, répéter les paroles que Delambre écrivait en 1806 : « Les deux questions de la grandeur et de la » figure de la Terre, qui exercent depuis longtemps les astronomes » et les géomètres, paraissent de nature à n'être jamais épuisées. »

J. BERTRAND [1].

---

[1] Article extrait du *Journal des Savants* (novembre 1874).

RENSHAW (S.-A.) — THE CONE AND ITS SECTIONS TREATED GEOMETRICALLY. — London, 1875. 1 vol. in-4°, 148 p., 110 fig.

L'auteur s'est proposé d'écrire un Ouvrage élémentaire sur les sections coniques, en revenant à la marche suivie par Apollonius, qui déduit leurs propriétés de leur génération comme sections du cône scalène. L'exposition est purement géométrique; mais M. Renshaw ne se borne pas à reproduire les propositions connues des anciens : il a fait entrer dans son Traité les théories ajoutées par les modernes, autant qu'elles se prêtent à l'emploi des procédés élémentaires de la Géométrie. Ainsi l'Ouvrage se termine par des Chapitres sur la quadrature des sections coniques, sur leur courbure, sur le rapport anharmonique et ses applications aux sections coniques, etc. Chaque Chapitre est suivi d'un recueil de questions proposées comme exercices.

M. Renshaw a fait, dans son livre, un usage très-important des propriétés du *cercle générateur* ou *auxiliaire*, défini par la construction suivante : Soient XX' la directrice d'une section conique, F son foyer, A son sommet; d'un point quelconque S du plan, comme centre, on décrit un cercle dont le rayon soit à la distance de S à XX', comme la distance du sommet A au foyer F est à la distance du même sommet à XX'. Ce cercle sera le cercle générateur. « La liaison de ce cercle avec les sections coniques », dit Walker dans son *Traité des Coniques*, publié en 1794, « est si intime que les démonstrations se réduisent souvent à transporter aux coniques les diverses propriétés de ce cercle. »

L'exécution typographique de l'Ouvrage contribue beaucoup à en faciliter la lecture. Les nombreuses figures qu'il renferme ont été exécutées en se préoccupant plutôt de la clarté que de l'élégance du dessin. Les unes sont intercalées dans le texte, les autres sont distribuées dans vingt-deux planches à la fin du volume.

Nous croyons devoir recommander ce Traité comme pouvant rendre de grands services dans l'enseignement synthétique de la théorie des courbes du second ordre.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON.

T. XXXIV; 1874.

RAPPORTS ANNUELS

ADRESSÉS AU CONSEIL DE LA SOCIÉTÉ ROYALE ASTRONOMIQUE, PAR LES DIRECTEURS DES DIFFÉRENTS OBSERVATOIRES DE LA GRANDE-BRETAGNE ([1]).

I. — Observatoire Royal de Greenwich.

Les travaux réguliers au cercle méridien et à l'altazimut ont été conduits comme par le passé, et le Catalogue des étoiles circompolaires avance maintenant très-vite, depuis que l'on s'est borné à trois observations de culmination supérieure et à trois de culmination inférieure.

Dans les autres branches de l'Astronomie d'observation les résultats sont également fort satisfaisants : avec le grand équatorial on a fait, pendant l'éclipse du 10 octobre 1873, une série considérable de mesures des cornes du croissant, mesures d'où l'on a pu déduire l'erreur de la position tabulaire de la Lune, les corrections des diamètres du Soleil et de la Lune ayant été données par l'éclipse de 1870.

Au spectroscope, outre les observations de la comète de Coggia, qui ont montré l'analogie complète de son spectre avec celui des composés carburés ([2]), et la détermination des mouvements propres de sept étoiles dont les résultats concordent avec ceux qu'a obtenus autrefois M. Huggins, M. Maunder a profité de toutes les occasions que lui a offertes le ciel, si peu clément, de Greenwich pour étudier les protubérances solaires et les taches de la surface du Soleil.

En outre, une grande attention a été donnée aux études photographiques, que M. Airy place au premier rang d'importance parmi

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 107.

([2]) On a constaté aussi une polarisation certaine dans la tête.

les observations d'Astronomie physique. On a pu prendre, avec le photohéliographe de Kew, l'épreuve du Soleil pendant 181 jours, et des nombreux clichés ainsi obtenus on en a conservé 337. De plus, le grand équatorial a servi à donner des épreuves de la Lune, de Saturne et de différents groupes d'étoiles, comme le beau groupe des Pléiades.

La publication des observations passées est complétement à jour; le volume de 1872 a paru, l'impression de celui de 1873 avance rapidement. Enfin on a continué, quoique lentement, l'œuvre de mesure des séries de taches solaires que montrent les photographies prises en 1873 et 1874.

Malheureusement la division magnétique a perdu son chef, M. Glaisher, qui a donné sa démission à la fin de 1874. Il a été remplacé par M. Ellis, qui était déjà à l'Observatoire de Greenwich, mais dans la Division astronomique.

II. — Observatoire de Radcliffe, à Oxford.

L'Observatoire de Radcliffe a, cette année encore, suivi sans modification notable le plan qui lui a été tracé, il y a quelques années, par son Directeur, M. Robert Main. Au cercle méridien on a observé, outre le Soleil, la Lune, Mercure et Jupiter, quinze cents étoiles en ascension droite et en déclinaison ([1]). La révision des positions des étoiles du Catalogue de l'*Association Britannique* (B. A. C.), visibles à la latitude de l'Observatoire, est maintenant complète, et la conclusion à tirer de ce grand travail est que, pour les étoiles de grandeur inférieure à la sixième, les positions données par le B. A. C. ne sont point suffisamment exactes, et que la *Société Astronomique* doit se préparer à publier, à bref délai, une nouvelle édition de ce Catalogue.

L'Observatoire d'Oxford a également achevé la réobservation des étoiles de Weisse-Bessel, Lalande, etc., qu'il avait choisies dans la zone de $+60°$ à $+70°$ D. P. N. pour la recherche des comètes et leur observation ultérieure. Les listes pour la zone de $+50°$ à $+60°$ D. P. N. sont prêtes actuellement, et le tra-

([1]) En 1872, on en avait observé 1323, et 1427 en 1873.

vail qu'exige la réobservation de cette zone a commencé avec l'année 1875.

L'héliomètre a servi à de nombreuses observations d'étoiles doubles [1], d'occultations d'étoiles par la Lune, des phénomènes des satellites de Jupiter et à l'observation des comètes; en particulier la comète de Coggia a pu être suivie à une époque où elle était devenue invisible dans les hautes latitudes de l'hémisphère nord.

Nous ajouterons que l'Observatoire a inauguré cette année la formation d'une série continue d'observations des taches solaires avec l'oculaire prismatique de M. Simms, série que M. Main se propose de poursuivre d'une façon régulière.

III. — Observatoire universitaire d'Oxford.

La période d'installation de l'Observatoire Savilien d'Oxford a été plus longue que ne le pensait M. Pritchard; elle n'est pas encore terminée actuellement. Cependant le savant professeur de l'Université d'Oxford espère que les travaux pourront commencer vers le mois d'avril ou de mai de 1875.

Le trente et unième volume des *Radcliffe Observations* (1871) a paru, et le volume des observations de 1872 ne tardera point à voir le jour.

IV. — Observatoire de Cambridge.

La partie importante des travaux de l'Observatoire de Cambridge, pendant l'année 1874, a encore été l'observation des étoiles de la zone comprise entre 25 et 30 degrés de déclinaison nord, que cet établissement a entreprise de concert avec la Société astronomique allemande. 5000 observations de ces petites étoiles ont été faites pendant l'année qui vient de s'écouler (il y a eu juste cent nuits d'observations). L'Observatoire a pris, en outre, une série de mesures des cornes du croissant lors de l'éclipse partielle de Soleil du 10 octobre 1874, et il a continué avec une grande régularité la série de ses observations météorologiques.

---

[1] Celles du Catalogue de Struve sont, à partir de cette année, observées aussi au cercle méridien.

V. — Observatoire Royal d'Édimbourg.

La situation que nous signalions dans notre dernier compte rendu (¹) ne parait point avoir été modifiée. M. Alex. Wallace est encore resté presque toujours seul à l'Observatoire, de sorte que, en dehors de la transmission de l'heure et des observations météorologiques, l'Observatoire Royal pour l'Écosse semble n'avoir rien fait.

Le grand équatorial n'est point encore sorti des ateliers du constructeur.

VI. — Observatoire Royal de Dunsink (Dublin).

Au printemps de 1874, M. Brünnow, usé par les fatigues et les agitations de sa longue carrière, a donné sa démission du poste d'Astronome Royal pour l'Irlande. M. R.-S. Ball lui a succédé, et M. Ralph Copeland a été nommé assistant. Ces modifications dans le personnel ont rendu tout travail impossible.

VII. — Observatoire de Durham.

M. J.-I. Plummer quitta cet établissement en juin 1874 : ce fut une cause d'interruption pour les travaux. La même difficulté existe d'ailleurs toujours à l'Observatoire : quelle est la voie la meilleure à suivre pour utiliser les maigres ressources de l'Observatoire en matériel et en personnel ? On semble être revenu maintenant à l'observation équatoriale des petites planètes, en y ajoutant celle des phénomènes des satellites de Jupiter et de quelques autres observations accidentelles.

On a d'ailleurs continué avec assiduité les observations météorologiques.

VIII. — Observatoire de Glasgow.

A part les observations nécessaires à la transmission de l'heure au port et à la ville de Glasgow, et les observations météorologiques régulières prescrites par le Comité météorologique central de

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 110.

Londres, les travaux de l'Observatoire ont été surtout des travaux de cabinet. M. Grant a continué la réduction des observations faites antérieurement dans le but de construire un Catalogue des étoiles boréales de la 6e à la 9e grandeur. Ce travail est aujourd'hui terminé pour les ascensions droites et donne les positions d'environ 6000 étoiles ramenées à l'équinoxe moyen de 1870, 0; pour les déclinaisons il est commencé et est en bonne voie d'exécution.

IX. — Observatoire de Liverpool (Bidston, Birkenhead).

Le nombre des chronomètres envoyés à l'Observatoire de Liverpool va en augmentant chaque année, et M. Hartnup se félicite des résultats obtenus avec ceux de ces instruments qui, après une première étude, ont été retournés aux fabricants pour l'amélioration de leur système de compensation.

X. — Observatoire de l'École de Rugby.

Comme l'année précédente, l'équatorial de 8,25 pouces ($0^m,21$) d'Alvan Clark, de l'Observatoire de Rugby, a été employé par MM. Wilson et Seabroke à des observations spectroscopiques des protubérances solaires, dont le nombre et la grandeur ont été bien moindres que précédemment, ainsi qu'aux mesures d'étoiles doubles qui sont la portion importante des travaux de l'établissement : 412 de ces systèmes binaires ont été étudiés.

En outre, quelques membres de l'École se sont consacrés à des études de Photographie céleste. Ils ont pu obtenir de belles épreuves de la Lune [agrandie jusqu'à 6 pouces ($0^m,14$) de diamètre] et de Jupiter, mais n'ont point réussi dans leurs essais sur les étoiles.

XI. — Observatoire de Stonyhurst.

En l'absence du R. P. Perry, en mission à l'île de Kerguelen pour l'observation du passage de Vénus, l'équatorial de 8 pouces ($0^m,20$) de l'Observatoire a été confié au R. P. W. Sidgreaves, qui l'a surtout fait servir à l'observation spectroscopique de la chromosphère solaire et à celle des phénomènes des satellites de Jupiter.

L'enregistrement photographique des indications données par les

instruments magnétiques et météorologiques a d'ailleurs été continué sans interruption.

XII. — Observatoire de M. Barclay (Leyton, Essex).

L'astronome de M. Barclay a continué ses études de prédilection : observations de comètes, d'occultations, des phénomènes des satellites de Jupiter, et surtout mesures d'étoiles doubles. En raison du petit nombre d'observatoires qui s'occupent de ces dernières mesures, œuvre importante de l'Observatoire de Leyton, les nombreux résultats obtenus avec l'équatorial de 10 pouces ($0^m,25$) de cet établissement acquièrent une valeur considérable.

XIII. — Observatoire de M. Huggins (Upper-Tulse-Hill).

Les seules observations que contienne le Rapport de M. Huggins sont celles de la belle comète de Coggia.

Lorsque la fente du spectroscope traverse le noyau et la tête on obtient un large spectre formé des trois bandes brillantes de la comète II, 1868, et des autres petites comètes, traversé par le spectre linéaire continu du noyau; entre ces bandes brillantes et au delà, on aperçoit aussi un spectre continu large et de faible intensité.

Étudions séparément ces différents éléments :

1° *Spectre des lignes brillantes.* — Ces bandes brillantes qui, parfois, et surtout à la base de la tête, se résolvent partiellement en lignes, ont été comparées au spectre de la partie inférieure bleue d'une lampe à huile ou à celui que donne l'étincelle produite dans le gaz oléfiant. Elles ont paru vers la partie la plus réfrangible du spectre d'environ le quart de la distance des lignes b^2 et b^3, ce qui correspondrait à un mouvement de la comète vers la terre d'environ 40 milles ($64^{km},4$) par seconde; or à cette époque la comète s'approchait de la Terre avec une vitesse d'environ 24 milles (38 kilomètres).

Le spectroscope seul ne peut dire sous quelle forme le carbone existe dans les comètes; mais la relation qui existe entre leurs orbites et celles des étoiles filantes et la présence d'hydrocarbures constatés dans certaines météorites tendraient à faire croire que le carbone y est combiné avec l'hydrogène.

2° *Spectre continu du noyau.* — Le noyau paraissait comme un petit point, orangé, très-brillant, avec une sorte d'intermittence dans sa lumière. Il a été impossible d'y distinguer d'autres lignes, soit brillantes, soit obscures, autres que les trois bandes brillantes dont nous venons de parler.

3° *Spectre continu accompagnant le spectre gazeux.* — Ce spectre devenait très-faible aux limites de la tête et dans l'espace obscur situé à l'arrière du noyau.

Le grand éclat relatif de certaines parties de l'enveloppe et de la tête était dû à de grandes quantités de matière qui donnaient lieu à un spectre continu.

Les portions les plus éloignées de la chevelure ne produisaient probablement qu'un spectre continu.

Dans toute l'étendue de la comète la lumière donnait des preuves évidentes de polarisation; mais la quantité de lumière polarisée n'excédait probablement pas un cinquième de la lumière totale.

XIV. — Observatoire de lord Lindsay (Dun-Echt, Aberdeenshire).

M. Carpenter, qui a été chargé de la direction de l'Observatoire pendant l'absence de lord Lindsay, s'est surtout occupé de l'observation des circompolaires au cercle méridien. En même temps, et à la grande joie des habitants du voisinage, il installait un *time gun* destiné à leur donner chaque jour l'instant du midi moyen.

XV. — Observatoire du comte de Rosse (Parson's Town, Birr Castle).

L'absence de l'astronome du comte de Rosse, M. Ralph Copeland, qui accompagna lord Lindsay à Maurice, et, plus tard, son départ de l'Observatoire pour aller prendre la direction de l'Observatoire de Durham, ont beaucoup nui aux travaux de l'Observatoire de Parson's Town. A ces obstacles, il faut en ajouter un autre, les retards apportés par les constructeurs à fournir la nouvelle monture du télescope de 3 pieds ($0^m,91$), qui est resté démonté toute l'année dernière.

L'Observatoire a fait néanmoins, avec le télescope de 6 pieds ($1^m,82$), quelques observations des satellites d'Uranus.

En outre, un service météorologique régulier a été installé à l'Observatoire de Parson's Town. On y fait chaque jour, depuis le

1er janvier 1874, trois lectures des instruments, les unes à 9 heures du matin et à 9 heures du soir, et, conformément au plan « *synchrone* » arrêté par le Congrès météorologique de Vienne en 1873, la troisième à $0^h 45^m$, temps moyen de Greenwich.

XVI. — Observatoire de M. Edward Crossley (Skircoat, Halifax).

C'est la première fois que M. E. Crossley adresse au Conseil de la Société un compte rendu des travaux de son Observatoire, dont la direction est confiée à M. Joseph Gledhill.

Nous donnerons donc une courte description de cet établissement. C'est un beau bâtiment en pierre divisé en quatre pièces.

La salle équatoriale a 18 pieds carrés : elle est surmontée par un dôme en bois recouvert de feuilles de cuivre et renferme un bel équatorial de Cooke, dont l'objectif a 9,75 pouces ($0^m,25$) d'ouverture; à cet instrument sont d'ailleurs joints tous les accessoires nécessaires, mouvement d'horlogerie, micromètres à fils et micromètre à double image, pendule sidérale, etc.

La salle méridienne a 12 pieds carrés et le cercle méridien qu'elle abrite a 3,5 pieds ($1^m,07$) de foyer, avec des cercles de déclinaison de 18 pouces ($0^m,45$) de diamètre; viennent ensuite une chambre pour les calculs et une autre servant de bibliothèque.

M. Crossley destine son Observatoire surtout à l'étude des étoiles doubles et à celle des phénomènes des satellites de Jupiter. Pendant l'année qui vient de s'écouler M. Gledhill a observé environ 400 systèmes binaires et 100 phénomènes de satellites de Jupiter.

XVII. — Observatoire du colonel Tomline (Orwell Park, Ipswich).

Voici encore un Observatoire de fondation toute récente et dont le Rapport arrive pour la première fois au Conseil. L'instrument principal de cet établissement est un grand équatorial dont l'objectif, dû à MM. Merz, de Munich, a 10 pouces ($0^m,25$) d'ouverture et est très-remarquable par son pouvoir de définition et la régularité des anneaux de diffraction qu'il donne autour de l'image focale des belles étoiles.

M. J.-I. Plummer, qui a pris la direction de cet Observatoire dans le courant de juin 1874, se propose surtout l'observation de toutes les comètes à mesure de leur découverte ou de leur réappari-

tion. Il a déjà publié deux belles séries d'observations des comètes III et V, 1874 (première et seconde comète de Coggia).

L'Observatoire d'Orwell Park possède, en outre, une bonne horloge de Dent et un petit instrument des passages : sa position approchée est donnée par

Longitude....... $0^h 4^m 55^s 8$ à l'est de Greenwich.
Latitude......... $52^\circ 0' 33''$ au nord.

XVIII. — Observatoire du Cap de Bonne-Espérance.

La révision des étoiles de la zone de 155 à 165 degrés D. P. N., qui faisait le but constant des efforts de l'Observatoire, est maintenant complétement terminée, et le Catalogue auquel elle doit servir de base en bonne voie d'exécution. Les listes préparatoires pour la zone de 165 à 175 degrés D. P. N. sont prêtes, et les observations de cette zone ont commencé le 1er janvier 1875 ; elles se font, comme dans la plupart des autres Observatoires anglais et même du monde entier, au moyen du chronographe et par l'enregistrement électrique : c'est là une heureuse innovation.

D'un autre côté, la Lune et les étoiles ont été observées constamment depuis le 12 octobre, afin d'aider à la détermination des longitudes des différentes stations adoptées pour l'observation du passage de Vénus. M. Stone complétait ainsi les observations qu'il a faites lui-même de ce passage par un temps exceptionnellement beau. Il avait aussi la joie d'apprendre que les observations de la planète Flora, faites au Cap l'année précédente, conduisaient, par leur combinaison avec celles des Observatoires de l'hémisphère boréal, à des résultats concordants, donnant, pour la parallaxe solaire, des valeurs comprises entre 8″,86 et 8″,92.

XIX. — Observatoire de Melbourne.

Au cercle méridien on a observé surtout les étoiles circompolaires et celles qui sont voisines de l'horizon nord, afin d'obtenir une valeur de la réfraction, les étoiles de comparaison de la comète de Coggia, la planète Flora, et, à partir du 1er octobre 1874, la Lune et les étoiles, et les occultations pour servir aux déterminations des longitudes des stations australes du passage de Vénus.

Le grand télescope de 1^m, 20 de diamètre a été employé à des buts divers. Outre des essais de Photographie lunaire qui ont parfaitement réussi, il a été consacré à une révision systématique de toutes les petites nébuleuses du ciel austral; l'étude de celles que contient le grand Ouvrage de sir John Herschel a permis de constater les changements notables qui se sont produits dans beaucoup d'entre elles depuis qu'elles ont été dessinées par l'illustre astronome. Enfin le grand télescope a servi encore à de nombreuses observations de la planète Flora lors de son opposition de la fin de 1873, et de la belle comète de Coggia (comète III, 1874) qui a pu être observée jusque vers la fin d'octobre.

Nous devons ajouter à ces travaux la continuation de la série régulière des observations météorologiques et magnétiques, et la publication du premier Catalogue de Melbourne : « *First Melbourne general Catalogue of* 1227 *stars for the epoch* 1870, *deduced from observations extending from* 1863 *to* 1870 ».

NACHRICHTEN VON DER K. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN UND DER GEORG-AUGUSTS-UNIVERSITÄT ZU GÖTTINGEN.

Année 1871 (suite) (¹).

KLEIN (F.). — *Sur la Géométrie nommée non euclidienne.* (15 p.)

Travail traduit dans le *Bulletin*, t. II, p. 341.

CHRISTOFFEL (E.-B.). — *Sur l'intégration de deux équations aux dérivées partielles.* (19 p.)

Étude se rattachant aux problèmes posés par Riemann, et dans lesquels il s'agit de trouver une fonction satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

et à des conditions aux limites.

(¹) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 186.

Listing (J.-B.). — *Sur le prisme de réflexion.* (52 p., 1 pl.)

Brill (A.). — *De la correspondance de systèmes de points sur une courbe.* (12 p.)

Travail développé dans les *Mathematische Annalen*, t. VI, p. 33.

Lie (S.). — *Sur la théorie d'un espace à n dimensions.* (22 p.)

Développement de l'article signalé plus haut. Extension du théorème de Dupin à un nombre quelconque de dimensions; transformations et systèmes orthogonaux dans cette Géométrie idéale.

Enneper (A.). — *Remarques sur l'équation différentielle d'une classe de courbes et de surfaces.* (7 p.)

Il s'agit des courbes introduites par M. Darboux, qui sont tracées sur une surface et pour lesquelles la sphère osculatrice est en chaque point tangente à la surface. L'auteur en donne l'équation différentielle, et il remarque qu'elles comprennent, comme cas particuliers, les courbes étudiées par M. Transon (*Journal de Liouville*, t. VI, p. 191) et par M. de la Gournerie (même *Journal*, t. XX, p. 145), qui ont cette propriété, que la section normale menée par une de leurs tangentes a un contact d'ordre supérieur avec son cercle de courbure [1].

Année 1872.

Enneper (A.). — *Sur les surfaces admettant un système de lignes de courbure sphérique.* (2 art., 34 p.)

---

[1] Voici quels ont été les cours de Mathématiques dans le semestre d'hiver 1871, à l'Université de Göttingue :

Stern. — Analyse algébrique (5 leçons).

Clebsch. — Géométrie analytique à trois dimensions (4 leçons).

Klein. — Des transformations en Géométrie (1 leçon).

Clebsch. — Courbes planes de degré supérieur (2 leçons).

Enneper. — Courbes à double courbure et surfaces, surfaces du second degré (5 leçons).

Schering. — Théorie des nombres réels, imaginaires et idéaux (4 leçons).

Enneper. — Calcul différentiel et intégral (5 leçons).

Stern. — Intégrales définies (4 leçons).

Minnigerode. — Théorie des fonctions d'une variable complexe (4 leçons).

Schering. — Méthode des moindres carrés (1 leçon de deux heures).

Klinkerfues. — Astronomie théorique (4 leçons).

Ulrich. — Mécanique analytique (5 leçons).

Schering. — Exercices sur le magnétisme (1 leçon).

Conférences au séminaire, par MM. Stern, Clebsch et Klinkerfues

L'auteur reprend d'une manière simple l'étude de cette question et la détermination de toutes les surfaces ayant les propriétés énoncées.

Clebsch (A.). — *Sur la surface complexe et la surface des singularités des complexes.* (12 p.)

Détermination de l'ordre et de la classe des deux surfaces mentionnées et généralisation des résultats à l'aide de la théorie des invariants.

König (J.). — *Sur une représentation réelle de la Géométrie non euclidienne.* (7 p.)

Klein (F.). — *Sur un théorème relatif à la géométrie de la ligne droite.* (11 p.)

Enneper (A.). — *Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales.* (14 p.)

Recherche de l'équation du troisième ordre dont dépend cette théorie; indication de plusieurs exemples nouveaux.

Riecke (E.). — *Remarques sur les pôles d'un barreau aimanté.* (9 p.)

Klein (F.). — *Sur un théorème de l'Analyse de situation.* (8 p.)
Travail développé dans les *Mathematische Annalen.*

Mayer (A.). — *Sur l'intégration simultanée des équations linéaires aux dérivées partielles.* (5 p.)

Lie (S.). — *Sur une méthode nouvelle d'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles.* (6 p.)

Klein (F.). — *De l'interprétation des éléments complexes en Géométrie.* (6 p.)

L'auteur fait remarquer qu'on peut notablement simplifier la représentation due à v. Staudt des points imaginaires en Géométrie. Il suffit, au lieu de définir le point imaginaire d'une droite par deux segments pris sur cette droite, de le définir par trois points réels auxquels le point imaginaire sera équianharmonique.

Riecke (E.). — *Sur la loi proposée par Helmholtz pour les actions mutuelles électrodynamiques.* (8 p.)

MAYER (A.). — *Sur la théorie des solutions complètes et la transformation des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* (16 p.)

L'auteur se propose d'indiquer des règles nouvelles pour déduire d'une solution complète toute autre solution du même genre; mais cette Note ne contient pas de démonstration. Elle a été développée dans un Mémoire de l'auteur.

CLEBSCH. — *Sur un nouvel élément fondamental de la Géométrie du plan.* (21 p.)

Publié *in extenso* dans le *Bulletin*, t. VIII, p. 234.

KOHLRAUSCH (F.). — *Sur la fonction électromotrice de couches gazeuses très-minces sur des plaques de métal.* (13 p.)

MAYER (A.). — *Sur la méthode de M. Lie, pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* (6 p.)

LIE (S.). — *Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, et en particulier sur leur classification.* (17 p.)

NÖTHER (M.) — *Sur la théorie des fonctions algébriques.* (9 p.)

GRASSMANN (H.). — *Sur la théorie des courbes du troisième ordre.* (4 p.)

GRASSMANN (H.). — *Sur les pôles associés et leur représentation par des produits.* (9 p.)

ENNEPER (A.). — *Sur les surfaces qui admettent une surface donnée pour lieu de leurs centres de courbure.* (23 p.)

CLAUSIUS (R.). — *Sur les rapports entre les grandeurs caractéristiques intervenant dans la théorie du mouvement autour d'un centre.* (47 p.)

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, herausgegeben von Dr O. SCHLÖMILCH, Dr E. KAHL und Dr M. CANTOR (1).

T. XX, fasc. 1, 2, 3; 1875 (suite).

MEES (A.-R.). — *Sur le calcul de l'erreur probable d'un nombre fini d'observations.* (8 p.)

Étude de la méthode des moindres carrés, et critique de quelques points faibles de la démonstration de Gauss, reconnus par l'auteur et signalés par lui à ses auditeurs dans ses Leçons sur la méthode des moindres carrés.

GUNDELFINGER (S.). — *Sur la théorie du faisceau de coniques.* (6 p.)

Étude des invariants relatifs à ce faisceau. Détermination des six coniques pour lesquelles les quatre points communs à toutes les coniques du faisceau forment un rapport anharmonique donné. Recherche spéciale des coniques équianharmoniques.

BACHMANN. — *Remarques arithmétiques.* (4 p.)

ECKARDT (F.-E.). — *Sur une classe de surfaces, et en particulier sur les surfaces du troisième ordre.* (9 p.)

Il s'agit des surfaces représentées par l'équation

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}m\alpha^r + \mathrm{B}n\beta^r + \mathrm{C}p\gamma^r + \mathrm{D}q\delta^r)(m_1\alpha + n_1\beta + p_1\gamma + q_1\delta)\\ = (\mathrm{A}m_1\alpha^r + \mathrm{B}n_1\beta^r + \mathrm{C}p_1\gamma^r + \mathrm{D}q_1\delta^r)(m\alpha + n\beta + p\gamma + q\delta),\end{aligned}$$

où α, β, γ, δ désignent des coordonnées homogènes.

SIMONY (O.). — *Sur le rapport de l'intensité moyenne du mouvement d'un atome faisant partie d'un ensemble solide quelconque à sa température moyenne.* (4 p.)

STEINSCHNEIDER (M.). — *Le Pseudo-Trithème et Cam. Leonardi.* (2 p.)

SIMONY (O.). — *Bases d'une nouvelle théorie moléculaire dans la supposition d'une matière et d'un principe de force.* (35 p.)

Suite d'un article précédent.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 236.

Lommel (E.). — *Solution élémentaire de quelques problèmes d'Optique.* (9 p.)

La plus petite déviation dans le prisme. — Le prisme achromatique. — Théorie élémentaire de l'arc-en-ciel.

Curtze (M.) — *Reliquiæ Copernicanæ.*

Suite d'un article du tome XIX.

Mertens. — *Du théorème de Legendre en Trigonométrie sphérique.* (3 p.)

Démonstration nouvelle de la célèbre proposition sur les triangles sphériques de côtés très-petits par rapport au rayon de la sphère.

Mischer (R.). — *Note sur les nombres dont la somme des chiffres est égale à leur racine* $\mu^{\text{ième}}$.

Curtze (M.). — *Remarques sur le Mémoire de M. Günther : « De l'Histoire des Mathématiques en Allemagne au* XVe *siècle. »*

MÉLANGES.

SUR LA COMPOSITION DES FORCES EN STATIQUE;

Par M. G. DARBOUX.

Dans un Mémoire de 1726, qui fait partie du tome I des *Commentaires de Saint-Pétersbourg,* Daniel Bernoulli examine la démonstration par laquelle Newton et Varignon ont déduit la loi de la composition des forces de celle des mouvements qu'elles produisent. Il critique cette démonstration et lui reproche, en particulier, de s'appuyer sur des vérités contingentes, c'est-à-dire empruntées à l'expérience : « *Nihil in illa demonstratione,* dit-il, *ut falsum rejicio, sed quædam ut obscura, quædam ut non necessario vera* ». Et, après un examen détaillé des objections qu'on peut faire, suivant lui, à la marche suivie par Newton, il passe à son objet principal, qui est de donner une démonstration *géométrique* de la composition des forces.

Sans donner une analyse complète des remarques de Bernoulli, on peut cependant observer que sa démonstration n'est pas aussi géométrique qu'il le suppose. Comme celle de Newton, elle repose sur des principes empruntés à l'expérience et particulièrement sur la notion même de résultante. Il est vrai qu'elle n'emploie pas la composition des mouvements; mais, en revanche, elle ne peut pas être étendue, sans explication nouvelle, au cas où les forces agissent sur un point en mouvement ([1]).

Quoi qu'il en soit, la marche suivie par D. Bernoulli a eu de nombreux imitateurs. La Statique est souvent enseignée seule ou indépendamment de la Dynamique, et elle repose tout entière sur la loi de la composition des forces. Il était donc naturel de rechercher une démonstration de cette loi, uniquement déduite de la considération de l'équilibre, et c'est ce que n'ont pas manqué de faire de nombreux géomètres.

Pour tout ce qui concerne la comparaison de la méthode de Bernoulli avec celle de Newton, ainsi que les démonstrations analogues à celles de Bernoulli parues avant la *Mécanique analytique*, on pourra lire la Notice sur la loi du parallélogramme placée au commencement de la *Mécanique analytique*. Parmi les divers écrits cités par Lagrange, nous signalerons surtout le Mémoire de d'Alembert, dans le tome I des *Opuscules mathématiques*, où la démonstration, un peu longue, de Bernoulli se trouve ramenée au dernier degré de simplicité.

Il est aujourd'hui peu de Recueils scientifiques où l'on ne rencontre au moins une démonstration de la règle du parallélogramme. Le premier Chapitre de la *Mécanique céleste* en contient une qui repose sur l'emploi des infiniment petits. Poisson, dans sa *Mécanique rationnelle* en donne une autre qui conduit à une équation fonctionnelle. On trouve encore, dans la dernière édition de la *Sta-*

([1]) En supposant, en effet, la résultante trouvée en Statique, voici comment on peut raisonner dans le cas où le point est en mouvement : Étant données deux forces P, Q agissant sur un point matériel A, introduisons deux forces — P, — Q et la force R qui leur ferait équilibre. L'état, c'est-à-dire le mouvement du point, ne sera pas changé. Supprimons les groupes P — P, Q — Q; il reste la force R, qui peut, par conséquent, remplacer les forces P, Q. Mais ce principe, qu'on peut ajouter ou supprimer sur un point matériel en mouvement des forces qui se feraient équilibre sur le point au repos, n'est au fond qu'un cas particulier de la loi de la composition des mouvements produits par les forces.

tique de Monge, une démonstration due à Cauchy et reproduite dans le tome I des *Exercices de Mathématiques*, 1826. Möbius en fait connaître une autre, fort curieuse, dans sa *Statique*. Celle que contiennent nos Traités de Mécanique est très-simple, mais elle repose sur un principe de la statique du corps solide; on l'attribue, je crois, à Ampère. Enfin, pour borner là notre énumération, citons encore, dans le *Journal de Liouville*, t. I, la démonstration de M. Aimé, qui se rapproche de celle de D. Bernoulli et n'offre aucun avantage sur celle-ci, telle qu'elle a été présentée par d'Alembert.

Ces différentes démonstrations reposent sur des principes qui leur sont communs, et sur d'autres qui sont propres à chacune d'elles. C'est ainsi que les unes admettent que la direction et la grandeur de la résultante varient d'une manière continue avec la grandeur et la direction des composantes; d'autres supposent seulement que la résultante est dirigée à l'intérieur de l'angle formé par les composantes, etc.

Je me suis proposé de reprendre l'étude de cette question en la traitant comme un problème de pure Géométrie, ce qu'elle est au fond, et en tâchant de conduire la démonstration de manière à bien mettre en évidence quelles sont les hypothèses qu'on peut rejeter et celles qu'il est nécessaire d'admettre. Je commencerai donc en admettant les hypothèses communes à toutes les démonstrations et en me proposant le problème de Géométrie suivant :

Étant données n lignes OA_1, OA_2, ..., OA_n, ayant leur origine en un point O, déterminer pour ces lignes une loi de composition d'après les conditions suivantes :

I. La résultante totale, unique et déterminée, demeurera invariable quand, à quelques-unes de ces lignes, on substituera leur résultante partielle. Elle sera indépendante de l'ordre dans lequel auront été faites les compositions partielles.

II. Elle sera aussi indépendante de l'orientation du système dans l'espace, c'est-à-dire qu'elle se déplacera en formant avec les lignes un système invariable quand on leur imprimera un déplacement quelconque autour du point O.

Dans cette manière de poser la question, il est nécessaire de bien prouver les points qui paraîtraient le plus évidents s'il s'agissait réellement de forces; la conclusion aura d'autant plus de valeur qu'on aura moins admis de conditions pour l'obtenir.

Il résulte d'abord des deux hypothèses admises que la résultante OC de deux lignes égales et directement opposées est nulle. En effet, le système des lignes OA, OB ne change pas : 1° par une rotation autour de AOB d'un angle quelconque; 2° par une rotation de 180 degrés autour d'un axe Ox perpendiculaire à AOB, qui amène OA sur OB et OB sur OA. Ces rotations ne devraient donc pas changer la direction de la résultante, ce qui est impossible. Il faut donc qu'elle soit nulle.

Réciproquement la résultante de deux lignes OA, OB n'est nulle que si elles sont égales et directement opposées. Supposons, en effet, que deux lignes OA, OB aient une résultante nulle. Considérons le système des trois lignes OA, OB et OB′ égale et directement opposée à OB. La résultante de ces trois lignes est OA; mais, comme la résultante de OA et de OB est nulle, elle est aussi OB′. Comme, d'après la condition I, il ne peut y avoir deux résultantes différentes, il faut que OB′ soit égale et parallèle à OA et de même sens qu'elle, c'est-à-dire qu'il faut que OA, OB soient égales et de sens opposés.

En second lieu, la résultante de deux lignes OA, OB est nécessairement dirigée dans leur plan, car soit OC cette résultante : deux lignes OA′, OB′ égales et opposées à OA, OB doivent avoir pour résultante OC′ égale et opposée à OC. En effet, la résultante de OA, OB, OA′, OB′ est nulle; il faut donc qu'il en soit de même de la résultante de OC et de OC′ et, par conséquent, que OC et OC′ soient égales et opposées.

Or, si l'on fait tourner OA, OB de 180 degrés dans leur plan, elles viennent s'appliquer sur OA′, OB′; il faut donc que OC vienne s'appliquer sur son prolongement OC′, ce qui exige que OC soit dans le plan BOA. Ainsi :

La résultante de deux lignes est contenue dans le plan de ces deux lignes.

Ce point étant admis, soient P, Q deux lignes appliquées au point O; adjoignons-leur une troisième ligne quelconque R non située dans leur plan et cherchons la résultante S de ces trois lignes. Soient R′ la résultante de P et Q, Q′ celle de P et R, P′ celle de Q et de R. On aura S en composant soit P et P′, soit Q et Q′, soit R et R′. D'où il suit que les plans de P et P′, de Q et Q′, de R et R′ doivent se couper suivant une même droite. On aura donc, d'après

un théorème connu relatif à l'angle trièdre,

$$\frac{\sin R'OP}{\sin R'OQ}\,\frac{\sin P'OQ}{\sin P'OR}\,\frac{\sin Q'OR}{\sin Q'OP}=-1,$$

$$\frac{\sin R'OP}{\sin QOR'}=\frac{\sin P'OR}{\sin P'OQ}:\frac{\sin Q'OR}{\sin Q'OP}.$$

Supposons OR perpendiculaire au plan POQ. Le rapport $\frac{\sin P'OR}{\sin P'OQ}$ ne dépend que des forces R et Q et de leur angle qui est supposé droit. Il est donc une fonction de R et de Q, $\varphi(R, Q)$. De même le rapport semblable $\frac{\sin Q'OR}{\sin Q'OP}$ est la même fonction de R et de P. On a donc

$$\frac{\sin R'OP}{\sin QOR'}=\frac{\varphi(R,Q)}{\varphi(R,P)},$$

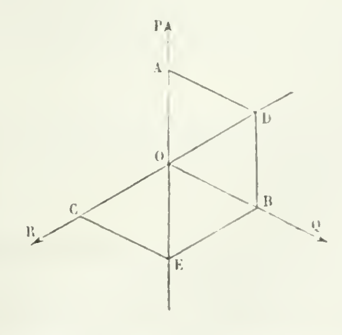
ou, en donnant à R une valeur numérique 1, par exemple.

$$\frac{\sin R'OP}{\sin QOR'}=\frac{\varphi(Q)}{\varphi(P)}.$$

Cette équation exprime que, si l'on porte la longueur $\varphi(P)$ sur P dans le sens de P ou en sens contraire, suivant que $\varphi(P)$ est positif ou négatif, et de même $\varphi(Q)$ sur Q, la résultante est *en direction* la diagonale du parallélogramme construit sur $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$.

J'ajoute que la diagonale sera, en grandeur, égale à la fonction $\varphi(R')$ de la résultante R'.

Soient, en effet, P, Q, R trois lignes dont la résultante soit nulle.



Chacune sera égale et opposée à la résultante des deux autres.

Prenons

$$OA = \varphi(P), \quad OB = \varphi(Q), \quad OC = \varphi(R);$$

OP sera, en direction, la diagonale du parallélogramme construit sur OB, OC; OR la diagonale du parallélogramme construit sur OA, OB. On a donc

$$OD = BE = OC, \quad \text{ou} \quad OD = \varphi(R).$$

Comme R est la grandeur de la résultante des deux lignes P, Q, on voit que la diagonale du parallélogramme construit sur $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$ a pour grandeur $\varphi(R)$, comme nous l'avions annoncé. De tout ce qui précède résulte la loi de composition suivante :

Étant données n lignes $P_1, P_2, \ldots, P_n$, la loi de composition la plus générale satisfaisant aux conditions I, II sera la suivante. On choisira une fonction $\varphi(x)$ et l'on portera des longueurs égales à $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2), \ldots, \varphi(P_n)$ respectivement sur $P_1, P_2, \ldots, P_n$, dans un sens déterminé par le signe de chacune de ces fonctions. On composera toutes ces lignes d'après les règles du polygone des forces, c'est-à-dire en les portant successivement les unes à la suite des autres; le côté qui fermera ce polygone donnera la direction de la résultante R, et il sera égal en grandeur à $\varphi(R)$.

Ajoutons que, pour que R soit bien connu, il faut qu'on puisse le déduire sans ambiguïté de la valeur de $\varphi(R)$. Remarquons aussi que la loi de composition ne sera pas changée si, à la place de $\varphi(x)$, on prend $m\varphi(x)$, m étant un nombre quelconque.

Les deux conditions I, II ne suffisent donc pas à nous conduire seules aux lois de la composition des forces. Nous ajouterons l'hypothèse suivante, qui est admise dans toutes les démonstrations de la loi du parallélogramme et sur laquelle repose la définition même de la grandeur d'une force.

III. La loi de la composition des lignes doit se réduire à celle de l'addition algébrique pour des lignes de même direction.

Voyons les conséquences de cette hypothèse sur la forme de la fonction $\varphi(P)$.

Considérons deux lignes quelconques P, Q, de même direction et de même sens, et d'autres lignes quelconques S, T,.... Dans le polygone des lignes résultant de la composition figurent deux côtés parallèles, $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$. Mais, si l'on compose P, Q en une autre

ligne P + Q, les deux côtés $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$ seront remplacés par un seul $\varphi(P+Q)$, qui leur sera parallèle. Comme la résultante totale ne doit pas être changée, il faut que l'on ait

$$\varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q).$$

Ainsi cette équation fonctionnelle est la traduction de notre nouvelle condition III.

On sait résoudre l'équation précédente en supposant $\varphi(P)$ continue. La fonction qu'on obtient alors est

$$\varphi(P) = aP.$$

Mais nous allons montrer que, en supposant $\varphi(P)$ simplement positif, on arrive au même résultat.

En effet, de l'équation

$$\varphi(P+Q) - \varphi(P) = \varphi(Q)$$

on déduit que la fonction $\varphi(x)$, si elle est positive, est toujours croissante. D'ailleurs c'est une conséquence bien connue de l'équation fonctionnelle, que l'on a

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\varphi(1),$$

c'est-à-dire $\varphi(x) = ax$, pour toutes les valeurs commensurables de x.

La fonction étant croissante, la même formule conviendra aussi évidemment, sans qu'il soit nécessaire de la supposer continue, pour les valeurs incommensurables de x [1].

D'après une remarque faite plus haut, on peut diviser par a et prendre $\varphi(x) = x$, ce qui conduit à la loi du parallélogramme.

Ainsi, pour obtenir cette loi, il faut ajouter aux trois hypothèses déjà faites l'une des deux suivantes :

IV. $\varphi(P)$ est toujours positif, c'est-à-dire $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$ sont de même signe.

---

[1] Car, soit x une incommensurable comprise entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$, on aura

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) < \varphi(x) < \varphi\left(\frac{p+1}{q}\right), \quad \text{ou} \quad a\frac{p}{q} < \varphi(x) < a\left(\frac{p+1}{q}\right);$$

$\varphi(x)$ sera donc comprise entre deux grandeurs ayant pour limite ax.

IV_a. $\varphi(P)$ est une fonction continue.

Examinons la signification mécanique de ces deux hypothèses.

IV. Si $\varphi(P)$ est toujours de même signe, la résultante des deux forces P, Q sera toujours dirigée dans leur angle.

IV_a. Si $\varphi(P)$ est continue, la direction de la résultante et sa grandeur seront des fonctions continues des deux forces.

Ainsi il faut admettre l'une ou l'autre des deux hypothèses qui précèdent pour obtenir la loi connue de la composition des forces.

Aucune démonstration n'échappe aux conditions que nous avons posées ici. Celle de Bernoulli modifiée par d'Alembert paraît encore la meilleure au point de vue du moindre nombre des hypothèses faites, et aussi parce qu'elle n'emploie que des constructions planes. Il nous semble que, en écartant des distinctions tout à fait déplacées dans un enseignement, on pourrait tirer des lignes qui précèdent un moyen assez simple d'obtenir en Statique la loi de la composition des forces.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Bessel (F.-W.). — Abhandlungen. Herausgegeben von R. Engelmann. 1. Bd. — Leipzig, Engelmann. In-4°. 18 M.

Cantor (M.). — Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. — Leipzig, Teubner, In-8°, 237 p., 4 pl. 6 M.

Enneper (A.). — Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Akademische Vorträge. — Halle, Nebert. Grand in-8°, 542 p. 16 M.

Hankel (H.). — Die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung. — Leipzig, Teubner. In-8°, 256 p. 7 M.

Hirn (G.-A.). — Théorie mécanique de la Chaleur (première Partie). Exposition analytique et expérimentale de la Théorie mécanique de la Chaleur. 3e édition, entièrement refondue. T. II. — Paris, Gauthier-Villars, 1876. Grand in-8°, XII-435 p. 12 fr.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME IX. — JUILLET-DÉCEMBRE 1875.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET JOURNAUX DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS LE BULLETIN.

MÉLANGES.

TABLE GÉNÉRALE DES MÉMOIRES ET OUVRAGES

CITÉS DANS CE VOLUME.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

I. — HISTOIRE DES SCIENCES.— GÉNÉRALITÉS.

II. — ARITHMÉTIQUE ET ANALYSE.

ARITHMÉTIQUE. THÉORIE DES NOMBRES.

TABLES LOGARITHMIQUES ET ASTRONOMIQUES.

ANALYSE ALGÉBRIQUE. THÉORIE DES ÉQUATIONS. DÉTERMINANTS, SÉRIES.

THÉORIE DES FORMES. INVARIANTS, COVARIANTS, ETC. SUBSTITUTIONS.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

III. — GÉOMÉTRIE.

IV. — MÉCANIQUE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

MÉCANIQUE GÉNÉRALE.

CINÉMATIQUE.

STATIQUE. ATTRACTION.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

CHALEUR.

ÉLECTRICITÉ. MAGNÉTISME.

OPTIQUE.

V. — ASTRONOMIE. — PHYSIQUE DU GLOBE.

ASTRONOMIE GÉNÉRALE.

MÉCANIQUE CÉLESTE.

DESCRIPTION ET TRAVAUX DES OBSERVATOIRES.

DESCRIPTION D'INSTRUMENTS.

ASTRONOMIE STELLAIRE. SPECTROSCOPIE.

SOLEIL. LUMIÈRE ZODIACALE.

PLANÈTES PRINCIPALES.

PETITES PLANÈTES.

PASSAGE DE VÉNUS. PARALLAXE SOLAIRE.

LUNE. SATELLITES DE JUPITER. ÉCLIPSE. OCCULTATIONS.

COMÈTES. ÉTOILES FILANTES.

GÉODÉSIE.

PHYSIQUE DU GLOBE.

PHOTOGRAPHIE.

FIN DU TOME NEUVIÈME.

Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.









